

# **КОМИТЕТ ПО ОБРАЗОВАНИЮ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА**

## **САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «КОЛЛЕДЖ МЕТРОПОЛИТЕНА И ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА»**

РАССМОТРЕНА И ПРИНЯТА  
на заседании Педагогического совета  
СПб ГБПОУ «Колледж метрополитена»  
протокол № 5 от 10.12. 2025 г.

УТВЕРЖДЕНА  
Приказом директора СПб ГБПОУ  
«Колледж метрополитена»  
от 17.12.2025 г. № 1056

## **КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

### **Комплект контрольно-оценочных средств по учебной дисциплине**

#### **ОУД.07 МАТЕМАТИКА**

образовательной программы среднего профессионального  
образования

по специальности **11.02.19 Квантовые коммуникации**

|                                                                        |                                       |
|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| Квалификация специалиста                                               | Специалист по квантовым коммуникациям |
| Форма обучения                                                         | очная                                 |
| Уровень образования,<br>необходимый для приема на<br>обучение по ППССЗ | основное<br>общее образование         |
| Срок получения СПО по<br>ППССЗ                                         | 2 года 10 месяцев                     |

Санкт-Петербург  
2025

КОС учебной дисциплины «Физическая культура» разработан на основе требований ФГОС среднего общего образования, утвержденного приказом Минпросвещения России № 413 от 17.05.2012 (с учётом изменений, утверждённых Приказом Министерства России от 27.12.2023 N 1028 «О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования»), федеральной образовательной программы среднего общего образования, утвержденной Приказом Минпросвещения России от 18.05.2023 № 371, распоряжения Минпросвещения России от 30.04.2021 № Р-98 5 «Об утверждении Концепции преподавания общеобразовательных дисциплин с учетом профессиональной направленности программ среднего профессионального образования, реализуемых на базе основного общего образования»; Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) по специальности 11.02.19 Квантовые коммуникации.

Укрупненная группа специальностей и направлений подготовки– 11.00.00 Электроника, радиотехника и система связи  
Специальность – 11.02.19 Квантовые коммуникации

**СОСТАВИТЕЛИ:**

Казиминова Н.М.– преподаватель СПб ГБПОУ «Колледж метрополитена»  
Серикова М.Г.– преподаватель СПб ГБПОУ «Колледж метрополитена»

Программа рассмотрена и одобрена на заседании предметно-цикловой комиссии естественно-научных дисциплин, протокол № 3 от 3.12.2025.

## **1. Паспорт комплекта контрольно-оценочных средств**

Контрольно-оценочные средства (КОС) предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины Математика

КОС включают контрольные материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации в форме экзамена

### **2. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке**

В результате аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих ОК:

| Общие компетенции                                                                                       | Планируемые результаты обучения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                         | Общие <sup>1</sup>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Дисциплинарные <sup>2</sup>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам | <ul style="list-style-type: none"> <li>- готовность к труду, осознание ценности мастерства, трудолюбие;</li> <li>- готовность к активной деятельности технологической и социальной направленности;</li> <li>- способность инициировать, планировать и самостоятельно выполнять такую деятельность;</li> <li>- интерес к различным сферам профессиональной деятельности;</li> </ul> <p>Овладение универсальными учебными познавательными действиями:</p> <p>а) базовые логические действия:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- самостоятельно формулировать и актуализировать проблему, рассматривать ее всесторонне;</li> <li>- устанавливать существенный признак или основания для сравнения, классификации и обобщения;</li> <li>- определять цели деятельности, задавать параметры и критерии их достижения;</li> <li>- выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых явлениях;</li> <li>- вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям, оценивать риски последствий деятельности;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- владеть методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;</li> <li>- уметь оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений;</li> <li>- уметь оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;</li> <li>- уметь оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; уметь находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;</li> </ul> |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>- развивать креативное мышление при решении жизненных проблем</p> <p>б) базовые исследовательские действия:</p> <p>- владеть навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем;</p> <p>- выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры критерии решения;</p> <p>- анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение новых условиях;</p> <p>-- уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности;</p> <p>- уметь интегрировать знания из разных предметных областей;</p> <p>- выдвигать новые идеи, предлагать оригинальные подходы и решения;</p> <p>и способность их использования в познавательной и социальной практике</p> | <p>уметь оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами;</p> <p>уметь решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов;</p> <p>уметь оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; уметь извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств;</p> <p>- уметь оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач;</p> |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | <p>оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;</p> <p>- уметь оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира;</p> <p>- уметь оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;</p> <p>- уметь оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;</p> |
|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы;</li> <li>- уметь оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками;</li> <li>- уметь выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.</li> <li>- уметь оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак, доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений;</li> <li>- уметь оперировать понятиями: множество, подмножество, операции над множествами; умение использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений при решении задач, в том числе из других учебных предметов;</li> </ul> |
|--|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | <ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь оперировать понятиями: граф, связный граф, дерево, цикл, граф на плоскости; умение задавать и описывать графы различными способами; использовать графы при решении задач;</li> <li>- уметь свободно оперировать понятиями: сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок; бином Ньютона; умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач;</li> <li>- уметь оперировать понятиями: натуральное число, целое число, остаток по модулю, рациональное число, иррациональное число, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; умение использовать признаки делимости, наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное, алгоритм Евклида при решении задач; знакомство с различными позиционными системами счисления;</li> <li>- уметь свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;</li> <li>- уметь оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром;</li> </ul> |
|--|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | <p>применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;</p> <p>-уметь свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами;</p> <p>умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции;</p> <p>умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами;</p> <p>изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем;</p> <p>- уметь свободно оперировать понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; умение задавать последовательности, в том числе с помощью рекуррентных формул;</p> |
|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | <p>- уметь оперировать понятиями: непрерывность функции, асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений;</p> <p>- уметь оперировать понятиями: комплексное число, сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа, форма записи комплексных чисел (геометрическая, тригонометрическая и алгебраическая); уметь производить арифметические действия с комплексными числами; приводить примеры использования комплексных чисел;</p> <p>- уметь свободно оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение для описания числовых данных; умение исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; графически исследовать совместные наблюдения с помощью диаграмм рассеивания и линейной регрессии;</p> |
|--|--|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | <p>- уметь находить вероятности событий с использованием графических методов; применять для решения задач формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы; оценивать вероятности реальных событий; умение оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины, функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений; умение использовать свойства изученных распределений для решения задач; знакомство с понятиями: закон больших чисел, методы выборочных исследований; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;</p> <p>- уметь свободно оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость,</p> |
|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | <p>касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам, выполнять необходимые дополнительные построения;</p> <p>- уметь свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур;</p> <p>- уметь свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни;</p> <p>- уметь свободно оперировать понятиями: прямоугольная система координат, вектор, координаты точки, координаты</p> |
|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                      |                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                      |                                                                                                                                                                                        | <p>вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, разложение вектора по базису, скалярное произведение, векторное произведение, угол между векторами; умение использовать векторный и координатный метод для решения геометрических задач и задач других учебных предметов; оперировать понятиями: матрица <math>2 \times 2</math> и <math>3 \times 3</math>, определитель матрицы, геометрический смысл определителя;</p> <p>- уметь моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера;</p> <p>- умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки</p> |
| ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные | В области ценности научного познания:<br>-сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, основанного на диалоге культур, | <p>- уметь оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

|                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>технологии для выполнения задач профессиональной деятельности</p> | <p>способствующего осознанию своего места в поликультурном мире;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- совершенствование языковой и читательской культуры как средства взаимодействия между людьми и познания мира;</li> <li>- осознание ценности научной деятельности, готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе.</li> </ul> <p>Овладение универсальными учебными познавательными действиями:</p> <p>в) работа с информацией:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- владеть навыками получения информации из источников разных типов, самостоятельно осуществлять поиск, анализ, систематизацию и интерпретацию информации различных видов и форм представления;</li> <li>- создавать тексты в различных форматах с учетом назначения информации и целевой аудитории, выбирая оптимальную форму представления и визуализации;</li> <li>- оценивать достоверность, легитимность информации, ее соответствие правовым и морально-этическим нормам;</li> <li>- использовать средства информационных и коммуникационных технологий в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач с соблюдением требований эргономики, техники безопасности,</li> </ul> | <p>решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; уметь решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;</li> <li>- уметь свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; уметь распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; уметь использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни</li> </ul> |
|----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                       | <p>гигиены, ресурсосбережения, правовых и этических норм, норм информационной безопасности;</p> <p>- владеть навыками распознавания и защиты информации, информационной безопасности личности</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <p>ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях</p> | <p>В области духовно-нравственного воспитания:</p> <p>-- сформированность нравственного сознания, этического поведения;</p> <p>- способность оценивать ситуацию и принимать осознанные решения, ориентируясь на морально-нравственные нормы и ценности;</p> <p>- осознание личного вклада в построение устойчивого будущего;</p> <p>- ответственное отношение к своим родителям и (или) другим членам семьи, созданию семьи на основе осознанного принятия ценностей семейной жизни в соответствии с традициями и народов России;</p> <p>Овладение универсальными регулятивными действиями:</p> <p>а) самоорганизация:</p> <p>- самостоятельно осуществлять познавательную деятельность, выявлять проблемы, ставить и формулировать собственные задачи образовательной деятельности и жизненных ситуациях;</p> <p>- самостоятельно составлять план решения проблемы с учетом имеющихся ресурсов,</p> | <p>- уметь оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы;</p> <p>- уметь оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, конуса, цилиндра, площадь сечения прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; уметь распознавать симметрию в пространстве; уметь распознавать правильные многогранники;</p> <p>- уметь оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками</p> |

|                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                      | <p>собственных возможностей и предпочтений;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- давать оценку новым ситуациям;</li> </ul> <p>способствовать формированию и проявлению широкой эрудиции в разных областях знаний, постоянно повышать свой образовательный и культурный уровень;</p> <p>б) самоконтроль:</p> <p>использовать приемы рефлексии для оценки ситуации, выбора верного решения;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь оценивать риски и своевременно принимать решения по их снижению;</li> </ul> <p>в) эмоциональный интеллект, предполагающий сформированность:</p> <p>внутренней мотивации, включающей стремление к достижению цели и успеху, оптимизм, инициативность, умение действовать, исходя из своих возможностей;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- эмпатии, включающей способность понимать эмоциональное состояние других, учитывать его при осуществлении коммуникации, способность к сочувствию и сопереживанию;</li> <li>- социальных навыков, включающих способность выстраивать отношения с другими людьми, заботиться, проявлять интерес и разрешать конфликты</li> </ul> |                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде | <p>готовность к саморазвитию, самостоятельности и самоопределению;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- овладение навыками учебно-исследовательской, проектной и социальной деятельности;</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; уметь вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей,</li> </ul> |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>Овладение универсальными коммуникативными действиями:</p> <p>б) совместная деятельность:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы;</li> <li>- принимать цели совместной деятельности, организовывать и координировать действия по ее достижению: составлять план действий, распределять роли с учетом мнений участников, обсуждать результаты совместной работы;</li> <li>- координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия;</li> <li>- осуществлять позитивное стратегическое поведение в различных ситуациях, проявлять творчество и воображение, быть инициативным.</li> </ul> <p>Овладение универсальными регулятивными действиями:</p> <p>г) принятие себя и других людей:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- принимать мотивы и аргументы других людей при анализе результатов деятельности;</li> <li>- признавать свое право и право других людей на ошибки;</li> <li>- развивать способность понимать мир с позиции другого человека</li> </ul> | <p>комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа;</li> <li>- уметь свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; уметь строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций;</li> <li>- уметь использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами;</li> <li>- свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; уметь проводить исследование функции;</li> <li>- уметь использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами;</li> </ul> |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста | <p>В области эстетического воспитания:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- эстетическое отношение к миру, включая эстетику быта, научного и технического творчества, спорта, труда и общественных отношений;</li> <li>- способность воспринимать различные виды искусства, традиции и творчество своего и других народов, ощущать эмоциональное воздействие искусства;</li> <li>- убежденность в значимости для личности и общества отечественного и мирового искусства, этнических культурных традиций и народного творчества;</li> <li>- готовность к самовыражению в разных видах искусства, стремление проявлять качества творческой личности;</li> </ul> <p>Овладение универсальными коммуникативными действиями:</p> <p>а) общение:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- осуществлять коммуникации во всех сферах жизни;</li> <li>- распознавать невербальные средства общения, понимать значение социальных знаков, распознавать предпосылки конфликтных ситуаций и смягчать конфликты;</li> <li>- развернуто и логично излагать свою точку зрения с использованием языковых средств</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств;</li> <li>- уметь оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями;</li> <li>- уметь использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира</li> </ul> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения</p> | <p>- осознание обучающимися российской гражданской идентичности;</p> <p>- целенаправленное развитие внутренней позиции личности на основе духовно-нравственных ценностей народов Российской Федерации, исторических и национально-культурных традиций, формирование системы значимых ценностно-смысловых установок, антикоррупционного мировоззрения, правосознания, экологической культуры, способности ставить цели и строить жизненные планы;</p> <p>В части гражданского воспитания:</p> <p>- осознание своих конституционных прав и обязанностей, уважение закона и правопорядка;</p> <p>- принятие традиционных национальных, общечеловеческих гуманистических и демократических ценностей;</p> <p>- готовность противостоять идеологии экстремизма, национализма, ксенофобии, дискриминации по социальным, религиозным, расовым, национальным признакам;</p> <p>- готовность вести совместную деятельность в интересах гражданского общества, участвовать в самоуправлении в общеобразовательной организации и детско-юношеских организациях;</p> <p>- умение взаимодействовать с социальными институтами в соответствии с их функциями и назначением;</p> | <p>уметь оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками;</p> <p>уметь выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки.</p> <p>- уметь оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; уметь вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  | <p>- готовность к гуманитарной и волонтерской деятельности;</p> <p>патриотического воспитания:</p> <p>- сформированность российской гражданской идентичности, патриотизма, уважения к своему народу, чувства ответственности перед Родиной, гордости за свой край, свою Родину, свой язык и культуру, прошлое и настоящее многонационального народа России;</p> <p>- ценностное отношение к государственным символам, историческому и природному наследию, памятникам, традициям народов России, достижениям России в науке, искусстве, спорте, технологиях и труде;</p> <p>- идейная убежденность, готовность к служению и защите Отечества, ответственность за его судьбу;</p> <p>освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия (регулятивные, познавательные, коммуникативные);</p> <p>- способность их использования в познавательной и социальной практике, готовность к самостоятельному планированию и осуществлению учебной деятельности, организации учебного сотрудничества с педагогическими работниками и сверстниками, к участию в построении индивидуальной образовательной траектории;</p> |  |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

|                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                     | - овладение навыками учебно-исследовательской, проектной и социальной деятельности                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p>ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях</p> <p>ПК 1.3.</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- не принимать действия, приносящие вред окружающей среде;</li> <li>- уметь прогнозировать неблагоприятные экологические последствия предпринимаемых действий, предотвращать их;</li> <li>- расширить опыт деятельности экологической направленности;</li> <li>- разрабатывать план решения проблемы с учетом анализа имеющихся материальных и нематериальных ресурсов;</li> <li>- осуществлять целенаправленный поиск переноса средств и способов действия в профессиональную среду;</li> <li>- уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности;</li> <li>- предлагать новые проекты, оценивать идеи с позиции новизны, оригинальности, практической значимости;</li> <li>- давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- уметь оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; уметь находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения;</li> <li>- уметь оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач;</li> <li>- уметь вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы</li> </ul> |

### 3. Оценка освоения учебной дисциплины

#### 3.1. Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам), видам контроля

| Элемент учебной дисциплины | Формы и методы контроля                                                       |                                               |                              |                                               |                          |                                               |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------------------|
|                            | Текущий контроль                                                              |                                               | Рубежный контроль            |                                               | Промежуточная аттестация |                                               |
|                            | Форма контроля                                                                | Проверяемые ОК                                | Форма контроля               | Проверяемые ОК                                | Форма контроля           | Проверяемые ОК                                |
| <b>Раздел 1</b>            |                                                                               |                                               | <i>Контрольная работа №1</i> | ОК 1-7<br>ПР6 01,02<br>ЛР 5, 9,13<br>МР 1,4,9 | <i>Экзамен</i>           | ОК 1-7<br>ПР6 01,02<br>ЛР 5, 9,13<br>МР 1,4,9 |
| Тема 1.1                   | <i>Устный опрос</i>                                                           | ОК 1-7<br>ПР6 01,02<br>ЛР 5, 9,13<br>МР 1,4,9 |                              |                                               |                          |                                               |
| Тема 1.2                   | <i>Устный опрос<br/>Практическое занятие №1</i>                               |                                               |                              |                                               |                          |                                               |
| Тема 1.3                   | <i>Устный опрос<br/>Практическое занятие №2<br/>Самостоятельная работа №1</i> |                                               |                              |                                               |                          |                                               |
| Тема 1.4                   | <i>Устный опрос<br/>Практическое занятие №3<br/>Практическая работа №4</i>    |                                               |                              |                                               |                          |                                               |
| <b>Раздел 2</b>            |                                                                               |                                               |                              |                                               |                          |                                               |
| Тема 2.1                   | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №5<br/>Практическая работа №6</i>     | ОК 1-7<br>ПР6 01,02<br>ЛР 5, 9,13<br>МР 1,4,9 |                              |                                               |                          |                                               |
| <b>Раздел 3</b>            |                                                                               |                                               |                              |                                               | <i>Экзамен</i>           | ОК 1-7<br>ПР6 01,02<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8     |
| Тема 3.1                   | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №7<br/>Практическая работа №8</i>     | ОК 1-7<br>ПР6 01,02<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8     |                              |                                               |                          |                                               |
| Тема 3.2                   | <i>Устный опрос</i>                                                           |                                               |                              |                                               |                          |                                               |

|                 |                                                                                   |                                               |                                  |                                               |                |                                               |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------|----------------|-----------------------------------------------|
|                 | <i>Практическая работа №9<br/>Самостоятельная работа<br/>№2</i>                   |                                               |                                  |                                               |                |                                               |
| <b>Раздел 4</b> |                                                                                   |                                               | <i>Контрольная<br/>работа №2</i> | ОК 1-7<br>ПР6 02,04<br>ЛР 5,9<br>МР 3,7,9     | <i>Экзамен</i> | ОК 1-7<br>ПР6 02,04<br>ЛР 5,9<br>МР 3,7,9     |
| Тема 4.1        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №10<br/>Самостоятельная работа<br/>№3</i> | ОК 1-7<br>ПР6 02,04<br>ЛР 5,9<br>МР 3,7,9     |                                  |                                               |                |                                               |
| Тема 4.2        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №11</i>                                   |                                               |                                  |                                               |                |                                               |
| Тема 4.3        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №12</i>                                   |                                               |                                  |                                               |                |                                               |
| <b>Раздел 5</b> |                                                                                   |                                               | <i>Контрольная<br/>работа №3</i> | ОК 1-7<br>ПР6 01,02<br>ЛР 5, 9,13<br>МР 1,4,9 | <i>Экзамен</i> | ОК 1-7<br>ПР6 01,02<br>ЛР 5, 9,13<br>МР 1,4,9 |
| Тема 5.1        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №13</i>                                   | ОК 1-7<br>ПР6 01,02<br>ЛР 5, 9,13<br>МР 1,4,9 |                                  |                                               |                |                                               |
| Тема 5.2        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №14<br/>Самостоятельная работа<br/>№4</i> |                                               |                                  |                                               |                |                                               |
| Тема 5.3        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №15<br/>Практическая работа №16</i>       |                                               |                                  |                                               |                |                                               |
| <b>Раздел 6</b> |                                                                                   |                                               | <i>Контрольная<br/>работа №4</i> | ОК 1-7<br>ПР6 03,06<br>ЛР 5, 9<br>МР 3,7,9    |                |                                               |
| Тема 6.1        | <i>Устный опрос<br/>Самостоятельная работа<br/>№5</i>                             | ОК 1-7<br>ПР6 03,06<br>ЛР 5, 9<br>МР 3,7,9    |                                  |                                               |                |                                               |
| Тема 6.2        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №17</i>                                   |                                               |                                  |                                               |                |                                               |
| Тема 6.3        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №18</i>                                   |                                               |                                  |                                               |                |                                               |

|                 |                                                                                   |                                              |                                                                |                                              |                |                                              |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------|----------------------------------------------|
|                 | <i>Практическая работа №19</i>                                                    |                                              |                                                                |                                              |                |                                              |
| Тема 6.4        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №20<br/>Практическая работа №21</i>       |                                              |                                                                |                                              |                |                                              |
| Тема 6.5        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №22</i>                                   |                                              |                                                                |                                              |                |                                              |
| <b>Раздел 7</b> |                                                                                   |                                              |                                                                |                                              | <i>Экзамен</i> | ОК 1-7<br>ПР6 03,06<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8    |
| Тема 7.1        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №23</i>                                   | ОК 1-7<br>ПР6 03,06                          |                                                                |                                              |                |                                              |
| Тема 7.2        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №24</i>                                   | ЛР 6,7<br>МР 2,5,8                           |                                                                |                                              |                |                                              |
| Тема 7.3        | <i>Устный опрос<br/>Самостоятельная работа<br/>№6</i>                             |                                              |                                                                |                                              |                |                                              |
| <b>Раздел 8</b> |                                                                                   |                                              | <i>Контрольная<br/>работа №5<br/>Контрольная<br/>работа №6</i> | ОК 1-7<br>ПР6 01,03<br>ЛР 5,9,13<br>МР 1,4,9 | <i>Экзамен</i> | ОК 1-7<br>ПР6 01,03<br>ЛР 5,9,13<br>МР 1,4,9 |
| Тема 8.1        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №25<br/>Практическая работа №26</i>       | ОК 1-7<br>ПР6 01,03<br>ЛР 5,9,13<br>МР 1,4,9 |                                                                |                                              |                |                                              |
| Тема 8.2        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №27<br/>Практическая работа №28</i>       |                                              |                                                                |                                              |                |                                              |
| Тема 8.3        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №29<br/>Самостоятельная работа<br/>№7</i> |                                              |                                                                |                                              |                |                                              |
| Тема 8.4        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №30<br/>Практическая работа №31</i>       |                                              |                                                                |                                              |                |                                              |
| <b>Раздел 9</b> |                                                                                   |                                              | <i>Контрольная<br/>работа №7</i>                               | ПР6 05<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8<br>ОК 1-7       | <i>Экзамен</i> | ПР6 05<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8<br>ОК 1-7       |
| Тема 9.1        | <i>Устный опрос</i>                                                               |                                              |                                                                |                                              |                |                                              |

|                  |                                                                                            |                                               |                              |                                               |                |        |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------|----------------|--------|
|                  | <i>Практическая работа №32</i><br><i>Практическая работа №33</i>                           | ПР6 05<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8<br>ОК 1-7        |                              |                                               |                |        |
| Тема 9.2         | <i>Устный опрос</i><br><i>Практическая работа №34</i>                                      |                                               |                              |                                               |                |        |
| Тема 9.3         | <i>Устный опрос</i><br><i>Практическая работа №35</i><br><i>Самостоятельная работа №8</i>  |                                               |                              |                                               |                |        |
| Тема 9.4         | <i>Устный опрос</i><br><i>Практическая работа №36</i>                                      |                                               |                              |                                               |                |        |
| Тема 9.5         | <i>Устный опрос</i><br><i>Практическая работа №37</i>                                      |                                               |                              |                                               |                |        |
| <b>Раздел 10</b> |                                                                                            |                                               | <i>Контрольная работа №8</i> | ОК 1-7<br>ПР6 02,06<br>ЛР 5, 9,13<br>МР 1,4,9 |                |        |
| Тема 10.1        | <i>Устный опрос</i><br><i>Практическая работа №38</i>                                      | ОК 1-7<br>ПР6 02,06<br>ЛР 5, 9,13<br>МР 1,4,9 |                              |                                               |                |        |
| Тема 10.2        | <i>Устный опрос</i><br><i>Практическая работа №39</i>                                      |                                               |                              |                                               |                |        |
| Тема 10.3        | <i>Устный опрос</i><br><i>Практическая работа №40</i>                                      |                                               |                              |                                               |                |        |
| Тема 10.4        | <i>Устный опрос</i><br><i>Самостоятельная работа №9</i>                                    |                                               |                              |                                               |                |        |
| <b>Раздел 11</b> |                                                                                            |                                               | <i>Контрольная работа №9</i> | ОК 1-7<br>ПР6 05<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8        |                |        |
| Тема 11.1        | <i>Устный опрос</i><br><i>Практическая работа №41</i><br><i>Самостоятельная работа №10</i> | ОК 1-7<br>ПР6 05<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8        |                              |                                               |                |        |
| Тема 11.2        | <i>Устный опрос</i><br><i>Практическая работа №42</i>                                      |                                               |                              |                                               |                |        |
| Тема 11.3        | <i>Устный опрос</i><br><i>Практическая работа №43</i><br><i>Практическая работа №44</i>    |                                               |                              |                                               |                |        |
| <b>Раздел 12</b> |                                                                                            |                                               |                              |                                               | <i>Экзамен</i> | ОК 1-7 |

|                  |                                                                                                  |                                           |                           |                                           |         |                                           |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------------|---------|-------------------------------------------|
|                  |                                                                                                  |                                           |                           |                                           |         | ПР6 03,06<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8           |
| Тема 12.1        | Устный опрос<br>Практическая работа №45                                                          | ОК 1-7<br>ПР6 03,06<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8 |                           |                                           |         |                                           |
| Тема 12.2        | Устный опрос<br>Практическая работа №46                                                          |                                           |                           |                                           |         |                                           |
| Тема 12.3        | Устный опрос<br>Практическая работа №47<br>Самостоятельная работа №11                            |                                           |                           |                                           |         |                                           |
| <b>Раздел 13</b> |                                                                                                  |                                           | Контрольная<br>работа №10 | ОК 1-7<br>ПР6 03,06<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8 | Экзамен | ОК 1-7<br>ПР6 03,06<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8 |
| Тема 13.1        | Устный опрос<br>Практическая работа №48                                                          | ОК 1-7<br>ПР6 03,06<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8 |                           |                                           |         |                                           |
| Тема 13.2        | Устный опрос<br>Практическая работа №49                                                          |                                           |                           |                                           |         |                                           |
| Тема 13.3        | Устный опрос<br>Практическая работа №50<br>Практическая работа №51<br>Самостоятельная работа №12 |                                           |                           |                                           |         |                                           |
| <b>Раздел 14</b> |                                                                                                  |                                           | Контрольная<br>работа №10 | ОК 1-7<br>ПР6 07<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8    | Экзамен | ОК 1-7<br>ПР6 07<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8    |
| Тема 14.1        | Устный опрос<br>Самостоятельная работа №13                                                       | ОК 1-7<br>ПР6 07<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8    |                           |                                           |         |                                           |
| Тема 14.2        | Устный опрос<br>Практическая работа №52                                                          |                                           |                           |                                           |         |                                           |
| Тема 14.3        | Устный опрос<br>Практическая работа №53                                                          |                                           |                           |                                           |         |                                           |
| Тема 14.4        | Устный опрос                                                                                     |                                           |                           |                                           |         |                                           |
| Тема 14.5        | Устный опрос                                                                                     |                                           |                           |                                           |         |                                           |
| Тема 14.6        | Устный опрос                                                                                     |                                           |                           |                                           |         |                                           |

|                  |                                                                             |                                           |                                   |                                           |  |  |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------|--|--|
|                  | <i>Самостоятельная работа<br/>№14</i>                                       |                                           |                                   |                                           |  |  |
| Тема 14.7        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №54</i>                             |                                           |                                   |                                           |  |  |
| Тема 14.8        | <i>Устный опрос</i>                                                         |                                           |                                   |                                           |  |  |
| Тема 14.9        | <i>Устный опрос</i>                                                         |                                           |                                   |                                           |  |  |
| Тема 14.10       | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №55</i>                             |                                           |                                   |                                           |  |  |
| Тема 14.11       | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №56</i>                             |                                           |                                   |                                           |  |  |
| <b>Раздел 15</b> |                                                                             |                                           | <i>Контрольная<br/>работа №12</i> | ОК 1-7<br>ПР6 03,04<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8 |  |  |
| Тема 15.1        | <i>Устный опрос<br/>Практическая работа №57<br/>Практическая работа №58</i> | ОК 1-7<br>ПР6 03,04<br>ЛР 6,7<br>МР 2,5,8 |                                   |                                           |  |  |

## 4. Комплект оценочных средств

### 4.1. Задания текущего контроля

#### Практическое занятие № 1. «Решение задач на множества и диаграммы Эйлера-Венна».

**Цель работы:** закрепление знаний о множествах; освоение приемов выполнения операций над множествами, построения диаграмм Эйлера-Венна.

##### Краткие теоретические сведения

*Множество* – основное математическое понятие. Его смысл выражается словами *совокупность, набор и т. д. однотипных элементов, воспринимаемых как единое целое.*

Множества обозначают большими латинскими буквами.

Например,  $A = \{\text{Коля, Петя, Маша, Ира}\}$ ,  $B = \{1, 2, 7\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ .

*Все предметы, составляющие множества, называются элементами множества.* Элементы множества обозначают маленькими латинскими буквами. Например, если элемент  $x$  принадлежит множеству  $K$ , то пишут  $x \in K$ , если элемент  $x$  не принадлежит множеству  $K$ , то пишут  $x \notin K$ .

Есть множество, в котором *нет ни одного элемента*. Его называют *пустым множеством* и обозначают  $\emptyset$ .

Множество может быть *конечным*, если оно *состоит из конечного числа элементов*, и *бесконечным*, если оно *содержит бесконечно много элементов*. Примером конечного множества может служить множество дней недели, примером бесконечного множества – множество натуральных чисел.

Множество может быть задано:

- перечислением. Например,  $K = \{2, 4, 20, 40\}$ ;
- характеристическим свойством, т.е. свойством, характерным

только для элементов этого множества. Например,  $G = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$ .

Из элементов множества  $A = \{\text{Коля, Петя, Маша, Ира}\}$ , например, можно составить новое множество  $M = \{\text{Петя, Маша}\}$ . Оно характеризуется тем, что все элементы  $M$  принадлежат множеству  $A$ . Говорят, что  $M$  – *подмножество* множества  $A$  и пишут  $M \subset A$ .

*Множество  $M$  является подмножеством множества  $A$ , если всякий элемент множества  $M$  является элементом множества  $A$  и обозначают  $M \subset A$ .*

Например, множество всех первокурсников является подмножеством множества всех студентов.

*Для любого множества  $A$  справедливо:*

- 1) Само множество является своим подмножеством, т.е.  $A \subset A$ .
- 2) Пустое множество является подмножеством любого множества, т.е.  $\emptyset \subset A$ .

### Пример:

Сколько можно составить подмножеств множества  $B$ ?

1.  $B = \{0, 1\}$ , тогда  $\{0\} \subset B$ ,  $\{1\} \subset B$ ,  $\emptyset \subset B$ ,  $\{0, 1\} \subset B$  – четыре.

2.  $B = \{1, 2, 3\}$ , тогда  $\{1\} \subset B$ ,  $\{2\} \subset B$ ,  $\{3\} \subset B$ ,  $\{1, 2\} \subset B$ ,  $\{1, 3\} \subset B$ ,  $\{2, 3\} \subset B$ ,  $\emptyset \subset B$ ,  $\{1, 2, 3\} \subset B$  – восемь.

Можно доказать, что если в множестве  $n$  элементов, то оно имеет  $2^n$  подмножеств.

Множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. А также множества  $A$  и  $B$  равны, если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ .

Пусть  $A = \{2, 1, 3\}$ , а  $B = \{1, 2, 3\}$  тогда  $A = B$ .

### Операции над множествами

Над множествами производятся операции: пересечение, объединение, разность, дополнение.

Пересечением множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество  $A \cap B$ , которое состоит из всех элементов, принадлежащих одновременно множествам  $A$  и  $B$ , т.е.  $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$ .

Объединением множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество  $A \cup B$ , которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$ , т.е.  $A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}$ .

Разностью множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество  $A \setminus B$ , которое состоит из всех элементов множества  $A$ , не принадлежащих множеству  $B$ , т.е.  $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ .

Дополнением множества  $A$  до множества  $B$  называется новое множество  ${}^{C(A)}B$ , которое состоит из всех элементов из  $B \setminus A$ , т.е.  ${}^{C(A)}B = \{x \in B \mid x \notin A\}$ .

Симметрической разностью множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \Delta B$ , являющееся объединением разностей множеств  $AB$  и  $BA$ , то есть  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

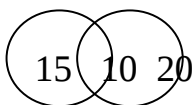
### Пример:

Пусть  $X = \{a, b\}$ , а  $Y = \{a, b, c\}$ , тогда  $X \cup Y = \{a, b, c\}$ ,  $X \cap Y = \{a\}$ ,  $X \setminus Y = \{b\}$ ,  ${}^{C(X)}Y = \{c\}$ ,  ${}^{C(Y)}X = \emptyset$ .

### Пример:

В бригаде 25 человек. Среди них 20 моложе 30 лет, 15 старше 20 лет. Может ли так быть?

Решение: Может! Пусть  $A$  – множество членов бригады моложе 30 лет.  $B$  – множество членов бригады старше 20 лет.  $C$  – множество всех членов бригады.  $C = A \cup B$ . Так как  $20 + 15 > 25$ , то  $A \cap B \neq \emptyset$ .



Из рисунка видно, что  $A \cap B$  составляет  $(15 + 20) - 25 = 10$  человек.

Тогда  $A$  состоит из  $15 - 10 = 5$  членов,

$B$  состоит из  $20 - 10 = 10$  членов.

### Задание:

1. Изучить теоретические положения, примеры решения задач,
2. Решить задачи (общее задание)

### Задание 1.

Задайте перечислением множества

- а) Множество всех гласных букв русского алфавита
- б) Множество цифр десятичной системы счисления
- в)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 - 1 = 0\}$ ;
- г)  $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$ ;
- д)  $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 15, x = 7k, k \in \mathbb{Z}\}$ .

### Задание 2.

- а) Найдите мощность множества  $F = \{10, 20 \dots 90\}$
- б) Найдите мощность множества цветов радуги.
- в) Найдите мощность множества времени года.

### Задание 3.

- 1. Привести пример таких множеств  $A, B$ , и  $C$ , что  $A \in B, B \in C$  и  $A \in C$ .
- 2. Привести пример таких множеств  $A, B$ , и  $C$ , что  $A \in B, B \in C$  и  $A \notin C$ .

### Задание 4.

Приведите пример множества, равного множеству  $A = \{d, h, j, p, t\}$

### Задание 5.

Запишите несколько подмножеств для множеств:

- а)  $D = \{10, 11, 12 \dots 98, 99\}$  – множество натуральных двузначных чисел,
- б)  $F = \{10, 20 \dots 90\}$  – множество чисел, оканчивающихся нулем.

Установите число подмножеств каждого множества

Может ли у множества быть:

- в) 0 подмножеств;
- г) 7 подмножеств;
- д) 16 подмножеств.

Приведите примеры

### Задание 6.

Множество  $B$  является подмножеством множества  $A$ . Чему равны множества  $A \cup B$  и  $A \cap B$ ?

### Задание 7.

Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность множеств  $A$  и  $B$ , если

- а)  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ;
- б)  $A = \{a, в, д, ж, и, м, н, о\}, B = \{в, к, и, о, м, п, с, ф\}$ ;

### Задание 8.

Даны следующие числовые множества:  $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}, B = \{2, 5, 6, 11, 12\}, C = \{1, 2, 3, 5, 9, 12\}$ . Найти множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций:

- е)  $(A \cup C) \Delta B$ ;
- ж)  $(A \cap C) \setminus B$ ;
- з)  $C \setminus B \Delta A$ ;

и)  $A \cap B \cap C$ ;

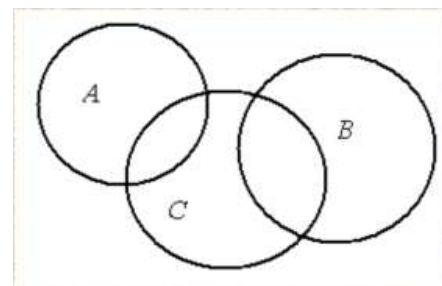
### Задание 9.

Заштрихуйте ту часть диаграммы, которая соответствует следующему множеству:

к)  $(A \cup B) \setminus C$ ;

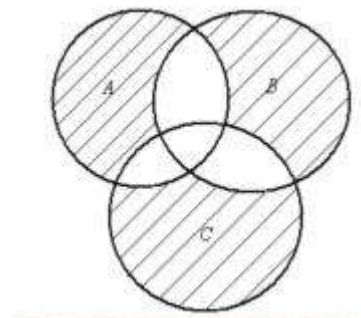
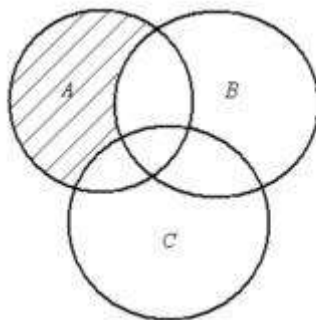
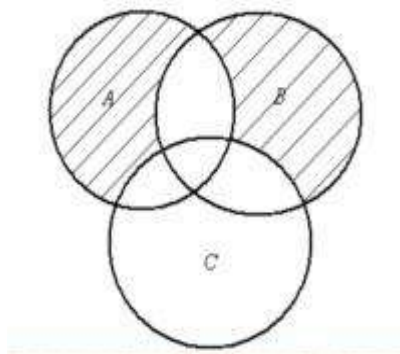
л)  $(A \cap B) \cup (C \Delta B)$ ;

м)  $(A \Delta B) \cap (C \setminus B)$ ;



### Задание 10.

Записать множество, изображенное с помощью кругов Эйлера на рисунке:



### Задание 11.

На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

Критерии оценки:

«3» - 5- 7 верно выполненных заданий

«4» - 8-10 верно выполненных заданий

«5» - 11 верно выполненных заданий

**Практическое занятие №2 «Применение дробей и процентов для решения прикладных задач».**

**Цель работы:** закрепление знаний о применении дробей и процентов для решения задач.

### Краткие теоретические сведения

*Определение.* Процент – сотая часть любого числа.

Виды задач на проценты:

1. Нахождение процента от числа.
2. Нахождение числа по его проценту.
3. Нахождение процентного отношения двух чисел.

*Нахождение процента от числа.*

Чтобы найти процентное отношение чисел, надо отношение этих чисел умножить на 100 или проценты превратить в десятичную дробь и умножить на это число.

Например, 20% от 45 кг равны  $45 \cdot 0,2 = 9$  кг, а 118% от  $x$  равны  $1,18x$ .

Задача 1: Банк обещает своим клиентам годовой рост вклада 30%. Какую сумму денег может получить через год человек, вложивший в этот банк 450 тыс. руб.?

Решение:  $450000 \cdot 0,3 + 450000 = 585000$  (руб.)

Ответ: 585000 руб.

*Нахождение числа по его проценту.*

Чтобы найти число по его процентам нужно, проценты превратить в десятичную дробь и число разделить на эту дробь.

Например, 8% длины отрезка составляют 2,4 см, от длины всего отрезка равна  $2,4 : 0,08 = 240 : 8 = 30$  см.

Задача. При помоле пшеницы получается 80% муки. Сколько пшеницы нужно смолоть, чтобы получить 480 кг пшеничной муки?

Решение:  $480 : 0,8 = 600$  кг.

Ответ: 600 кг.

*Нахождение процентного отношения двух чисел.*

Чтобы найти процентное отношение чисел, надо отношение этих чисел умножить на 100.

Задача.

В 200 г воды растворили 50 г соли. Какова концентрация полученного раствора?

Решение: Концентрация раствора – это процент, который составляет масса вещества в растворе от массы раствора.  $(50 : 250) \cdot 100 = 20\%$ . Ответ: 20%.

Задание:

3. Изучить теоретические положения, примеры решения задач,
4. Решить задачи (по вариантам)

### Вариант 1

1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 5300 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?
2. Шариковая ручка стоит 36 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 700 рублей после повышения цены на 25%?
3. Тетрадь стоит 35 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 750 рублей после понижения цены на 10%?
4. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 90 рублей за штуку и продает с наценкой 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1100 рублей?

5 Оптовая цена учебника 220 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 9000 рублей?

6. В городе N живет 300000 жителей. Среди них 20% детей и подростков. Среди взрослых 35% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых работает?

### **Вариант 2**

1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 4100 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 12 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

2. Флакон шампуня стоит 180 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1500 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 10%?

3. Цена на электрический чайник была повышена на 16% и составила 3480 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

4. Шариковая ручка стоит 30 рублей. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 400 рублей после повышения цены на 15%?

5. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 120 рублей за штуку и продает с наценкой 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 2100 рублей?

6. В городе N живет 400000 жителей. Среди них 30% детей и подростков. Среди взрослых 37% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых работает?

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных задания

«4» - 5 верно выполненных заданий

«5» - 6 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №3 «Приближенные вычисления, правила округления, прикидка и оценка результатов вычисления».***

**Цель работы:** закрепление знаний о приближенных вычислениях; освоение приемов оценки и прикидки результатов вычислений.

#### **Краткие теоретические сведения**

Знание точности измерений — обязательное условие, поэтому в задачу измерений входит не только нахождение самой величины, но и оценка допущенных при этом погрешностей (ошибок).

Правило округления чисел: Если первая слева отбрасываемая цифра меньше 5, то округляют с недостатком, если это цифра 5 или больше, то округляют с избытком.

Пример. 5,739 (с точностью до 0,01) 5,74

Абсолютные и относительные ошибки измерений

Как было сказано выше, результат измерения любой величины отличается от истинного значения. Это отличие, равное разности между показанием прибора и истинным значением, называется абсолютной погрешностью измерения, которая выражается в тех же единицах, что и сама измеряемая величина:

$$\Delta = |A - A_0|$$

где  $\Delta A$  — абсолютная погрешность;  $A$  — показатель прибора;  $A_0$  — истинное значение.

Пример. Найти абсолютную погрешность приближения 0,44 числа  $\frac{4}{9}$ .

$$\Delta = \left| \frac{4}{9} - 0,44 \right| = \left| \frac{4}{9} - \frac{11}{25} \right| = \left| \frac{100-99}{225} \right| = \frac{1}{225}$$

На практике во многих случаях точное значение бывает неизвестно, поэтому абсолютную погрешность найти нельзя. Однако можно дать оценку абсолютной погрешности, если известны приближения с избытком и с недостатком.

Относительная погрешность определяется как отношение абсолютной погрешности к истинным значениям измеряемой величины. Обычно выражается в процентах.

$$\delta = \frac{\Delta}{A} \cdot 100\%$$

Задание:

5. Изучить теоретические положения, примеры решения задач,
6. Решить задачи (по вариантам)

Задачи:

### **ВАРИАНТ – 1**

1. Округлить с точностью до 0,01 следующие числа:  
2,645                      25,689
2. Округлить с точность до 1 следующие числа:  
17,349                      0,785
3. Округлить с точностью до 1000 следующие числа:  
4382                      72356
4. Найти абсолютную и относительную погрешности если известно, что - 0,143 является приближенным значением для  $-\frac{1}{7}$ .
5. Округлить число 21,345 тремя способами, найти ошибки округления.
6. Выполнить действия:  
а)  $428,263 + 107,316 + 264,2 + 748,35$ ;  
б) найти с точностью до 100  
 $283,425 + 15627,321 + 17216,35$ .

### **ВАРИАНТ – 2**

1. Округлить с точностью до 0,01 следующие числа:  
0,428                      16,452
2. Округлить с точность до 1 следующие числа:  
16,285                      60,605

3. Округлить с точностью до 1000 следующие числа:  
1835            10428
4. Найти абсолютную и относительную погрешности если известно, что 0,777 является приближенным значением для  $7/9$ .
5. Округлить число 18,315 тремя способами, найти ошибки округления.
6. Выполнить действия:
  - а)  $15,283 + 4,04527 + 8,253741 + 17,52$ ;
  - б) найти с точностью до 0,01  
 $564,375 + 7489,296 + 114,206 + 748,601$ .

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных задачи

«4» - 5 верно выполненных задач

«5» - 6 верно выполненных задач

### **Практическое занятие №4 «Использование подходящей формы записи действительных чисел для решения практических задач и представления данных».**

**Цель работы:** закрепление знаний о действительных числах; освоение приемов выполнения операций над числами.

#### **Краткие теоретические сведения**

Обозначение:

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$  - множество натуральных чисел

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  - множество целых чисел

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \right\}$ , где  $m \in Z; n \in N$  - множество рациональных чисел.

$R$ -множество действительных чисел (рациональных и иррациональных)

$\in$  - знак принадлежности.

Например:  $7 \in N, -8 \in Z, \frac{7}{8} \in Q$ .

*Рациональное число* (ratio - «отношение», частное).

Всякое рациональное число можно представить в виде десятичной дроби:  $2/5 = 0,4$ ;

$$23/20 = 1,15;$$

$$-1/40 = -0,025; \quad 8/37 = 0,216216216$$

3) Основное свойство пропорции  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ,

$$a \cdot d = b \cdot c \text{ или } a:b = c:d \text{ или } a \cdot d = b \cdot c$$

Пример:  $y: 0,6 = 7: 2,1$

$$y \cdot 2,1 = 0,6 \cdot 7 \Rightarrow y = \frac{0,6 \cdot 7}{2,1} = 2$$

4) Найдите значение выражения

$$\frac{\left(5\frac{4}{45} - 4\frac{1}{6}\right) : 5\frac{8}{15} \cdot 34\frac{2}{7} + \frac{0,3:0,01}{70} + \frac{2}{7}}{\left(4\frac{2}{3} + 0,75\right) \cdot 3\frac{9}{13}} = 1$$

Задание:

1. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
2. Решить задачи (по вариантам)

### Задание 1

Выберите среди данных чисел натуральные, целые, рациональные, иррациональные:

|          |                                                                                                         |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1вариант | 4; - 0,7; $\cos 60^0$ ; - 5; $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ; 0; $\frac{5}{7}$ ; $\sqrt{11}$ ; 4,3; $\sin 45^0$ . |
| 2вариант | 0,2; 5; $\sqrt{31}$ ; $\frac{5}{7}$ ; -62; $\sqrt{0,3}$ ; -1,3; 0; $\sin 60^0$ ; $\cos 45^0$ .          |

### Задание 2

Выполнить действия:  $A + B$ ;  $A - B$ ;  $A \cdot B$ ;  $\frac{A}{B}$ :

| №        | A               | B               |
|----------|-----------------|-----------------|
| 1вариант | $\frac{3}{2}$   | $-\frac{1}{12}$ |
| 2вариант | $-\frac{9}{14}$ | $\frac{3}{16}$  |

### Задание 3

Найдите неизвестный член пропорции:

|          |                     |
|----------|---------------------|
| 1вариант | $x: 2,4 = 17,5: 2$  |
| 2вариант | $4,5: 0,6 = x: 2,4$ |

### Задание 4

Найдите значение выражения:

|   |                                                                                                                                                          |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\frac{2\frac{3}{4}: 1,1 + 3\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} - \frac{(2\frac{1}{6} + 4,5) \cdot 0,375}{2,75 - 1\frac{1}{2}}}{2,5 - 0,4 \cdot 3\frac{1}{3}}$ |
| 2 | $\frac{0,5 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + 0,125}{\frac{1}{3} + 0,4 + \frac{14}{15}} + \frac{(3,75 - 0,625) \cdot \frac{48}{125}}{12,8 \cdot 0,25}$        |

Критерии оценки:

- «3» - 2 верно выполненных заданий
- «4» - 3 верно выполненных заданий
- «5» - 4 верно выполненных заданий

## Практическое занятие №5 «Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия».

**Цель работы:** закрепление умений выполнять задания на прогрессию, развитие логического мышления, навыков сравнительного анализа.

### Краткие теоретические сведения

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность задаваемая двумя параметрами  $b, q$  ( $q \neq 0$ ) и законом  $b_n = b_{n-1} \cdot q, n = 2, 3, \dots$ . Число  $q$  называют знаменателем данной геометрической прогрессии.

В случае  $-1 < q < 1$  прогрессию называют бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Любой член геометрической прогрессии может быть вычислен по формуле:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1};$$

Формула знаменателя геометрической прогрессии:

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Формула суммы  $n$ -первых членов геометрической прогрессии для  $q \neq 1$ :

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q};$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия — это прогрессия, у которой  $|q| < 1$ . Для неё определяется понятие суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как число, к которому неограниченно приближается сумма  $n$  первых членов рассматриваемой прогрессии при неограниченном возрастании числа  $n$ .

Формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии для  $q \neq 1$ :

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Пример.

Задана геометрическая прогрессия 2, 6, 18, ... Найти десятый член прогрессии и сумму её двенадцати первых членов.

$$2, 6, 18, \dots \quad b_{10} = ? \quad S_{12} = ?$$

$$b_1 = 2 \quad q = \frac{6}{2} = 3 \quad b_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} = 39366 \quad S_{12} = \frac{b_1 \cdot (q^{12} - 1)}{q - 1} = \frac{2 \cdot (3^{12} - 1)}{3 - 1} = 531440$$

$$\text{Ответ: } b_{10} = 39366; \quad S_{12} = 531440$$

Задание:

3. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
4. Решить задачи (по вариантам)

### Вариант 1.

1. Выясните, является ли геометрической прогрессией последовательность,

заданная формулой  $n$ -го члена  $b^n = 3^n$

2. Выясните, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей  $1; \frac{1}{9}; \frac{1}{81}; \dots$

3. Найдите сумму шести членов геометрической прогрессии  $b_2 = 10, q = 2$

4. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если  $b_1 = 4, q = \frac{1}{4}$

5. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если  $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}, q = \frac{1}{2}$

6. Найдите  $b_2$ , если сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 20, а  $q = \frac{1}{2}$ .

### Вариант 2.

1. Выясните, является ли геометрической прогрессией последовательность, заданная формулой  $n$ -го члена  $b^n = -4^n$

2. Выясните, является ли геометрическая прогрессия бесконечно убывающей  $1; \frac{1}{7}; \frac{1}{49}; \dots$

3. Найдите сумму пяти членов геометрической прогрессии

$$b_3 = 9, q = 3$$

4. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если

$$b_1 = 6, q = \frac{1}{3}$$

5. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если

$$b_3 = \frac{\sqrt{3}}{9}; q = \frac{1}{3}$$

6. Найдите  $b_2$ , если сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 50, а  $q = \frac{1}{5}$ .

Критерии оценки:

«3» - 3- 4 верно выполненных заданий

«4» - 5 верно выполненных заданий

«5» - 6 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №6 «Задачи на проценты, необходимые в практической и профессиональной деятельности».***

**Цель работы:** закрепление знаний о процентах; освоение приемов выполнения задач на проценты в профессиональной деятельности.

#### **Краткие теоретические сведения**

1) Нахождение процента от числа

Чтобы найти проценты от числа, можно проценты представить в виде десятичной дроби и число умножить на полученную десятичную дробь.

Задача: Предприятие изготовило за квартал 500 насосов, из которых 60 % имели высшую категорию качества. Сколько насосов высшей категории качества изготовило предприятие?

Решение: Найдем 60 % от 500 (общее количество насосов).

$$60 \% = 0,6$$

$$500 \cdot 0,6 = 300 \text{ насосов высшей категории качества.}$$

Ответ: 300 насосов высшей категории качества.

2) Нахождение числа по его проценту. Чтобы найти число по его процентам, можно проценты представить в виде десятичной дроби и данное число разделить на полученную десятичную дробь.

Задача: Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23 % числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

Решение:

Итак, нам неизвестно сколько всего страниц в книге. Но мы знаем, что часть, которую прочитал ученик (138 страниц) составляет 23 % от общего количества страниц в книге. Так как 138 стр. - это всего лишь часть, само количество страниц, естественно, будет больше 138. Это поможет нам при проверке.

$$138 : 23 \% = 138 : 0,23 = \frac{138 \cdot 100}{23} = 600 \text{ (стр.)}$$

Проверка: 600  $\cdot$  23 (это означает, что 138 является частью 600).

Ответ: 600 (стр.) - общее количество страниц в книге.

3) Сколько процентов одно число составляет от другого.

Чтобы найти сколько процентов одно число составляет от другого можно одно число разделить на другое и полученное произведение умножить на 100.

Задача: Из 200 арбузов 16 оказались незрелыми. Сколько процентов всех арбузов составили незрелые арбузы?

Решение:

16 делим на общее количество арбузов и умножаем на 100 %.

$$(16 : 200) \cdot 100\% = \frac{16}{200} \cdot 100\% = \frac{2}{25} \cdot 100\% = \frac{200\%}{25} = 8\%$$

Ответ: 8 % - составляют незрелые арбузы от всех арбузов.

Задание:

5. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
6. Решить задачи (общее задание)

**Задачи.**

1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 560 рублей. Стоимость билета школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 24 школьников и троих взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?
2. Билет на пассажирский поезд стоит 1300 рублей. Работнику железной дороги предоставляется бесплатный билет, студентам со скидкой 50%. Сколько придется заплатить за билеты семье из 4-х человек (сын и дочь

студенты), в которой отец работает машинистом локомотива?

3. Подоходный налог составляет 13% от заработной платы. После удержания налога машинист Валерий Иванович получил 113100 рублей. Какова его заработная плата?

4. Студент взял кредит на оплату обучения в размере 75 тыс. рублей под 24 % годовых. Определите размер его ежемесячного взноса, если кредит взят на 1 год и погашается ежемесячно равными долями.

5. Расценки на грузоперевозки по железной дороге увеличивались за год дважды: на 20% в первый раз и на 10% во второй. Определите, на сколько процентов возрастут расходы почтовой фирмы на железнодорожный транспорт, если объем перевозимой ею по железной дороге почты вырос на 30%.

Критерии оценки:

«3» - 3 верно выполненных заданий

«4» - 4 верно выполненных заданий

«5» - 5 верно выполненных заданий

***Практическое занятие №7 «Степень с рациональным и действительным показателем».***

**Цель работы:** закрепление умений и навыков применять свойства степеней с рациональным и действительным показателем.

### **Краткие теоретические сведения**

Выражение  $a^x$  называется степенью.

В этом выражении число  $a$  называется основанием степени, а число  $x$  - показателем степени.

Для положительных чисел  $a$  и  $b$  и рациональных чисел  $x$  и  $y$  справедливы следующие свойства степени:

1.  $a^0 = 1$

Любое число в нулевой степени равно 1.

2.  $a^x a^y = a^{x+y}$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями, основание остается прежним, а показатели складываются.

3.  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

При делении степеней с одинаковыми основаниями, основание остается

прежним, а показатели вычитаются.

$$4. (ab)^x = a^x b^x$$

При возведении в степень произведения, в эту степень возводится каждый множитель.

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

При возведении в степень дроби в эту степень возводится числитель дроби и знаменатель.

$$6. (a^x)^y = a^{xy}$$

При возведении степени в степень показатели перемножаются.

$$7. a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

При возведении в отрицательную степень, основание степени «переворачивается», и знак показателя степени меняется на противоположный.

Примеры:

$$1. 3^2 \cdot 3^3 : 3^4 = 3^{2+3-4} = 3;$$

$$2. (2^3)^2 = 2^6 = 64;$$

$$3. 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125};$$

Задание:

1. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
2. Решить задачи (задания для всех, без вариантов)

**Выполнить задания.**

1. Найдите наибольшее из чисел:

$$1) (\sqrt{2})^{3,7}; \quad 2) 4^{\frac{3}{5}}; \quad 3) 2^{\frac{1}{3}}; \quad 4) (\sqrt[3]{2})^{4,7}.$$

$$2. \text{Вычислите } \frac{25^{\frac{3}{2}} - 27^{\frac{2}{3}} - 6^2}{2^5}.$$

3. Вычислите  $29 \cdot 16^{\frac{1}{4}} - 15$

4. Вычислите  $7 - 3 \cdot 64^{\frac{1}{6}}$

5. Вычислите  $2 \cdot 125^{\frac{1}{3}} - 0,9^0$

6. Найдите значение выражения  $\frac{a^{0,5} - 16b^{0,5}}{a^{0,25} - 4b^{0,25}} - 4b^{0,25}$ , если  $a = 16$

7. Найдите значение выражения  $\frac{a^{1,5} + 27b^{1,5}}{a - 3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + 9b} - 3b^{\frac{1}{2}}$ , если  $a = 9$

8. Вычислите  $\left( \left( 4\frac{17}{27} \right)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{9} \right)^{\frac{1}{4}}$

Критерии оценки:

«3» - 4-5 верно выполненных заданий

«4» - 6-7 верно выполненных заданий

«5» - 8 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №8 «Решение иррациональных уравнений и неравенств».***

**Цель работы:** закрепление умений и навыков применять алгоритм при решении иррациональных уравнений и неравенств различного вида.

#### **Краткие теоретические сведения**

1. Иррациональные неравенства вида  $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

Чтобы его решить, нужно обе части неравенства возвести в квадрат и вовремя вспомнить об ОДЗ: подкоренное выражение меньшего из корней должно быть неотрицательным – тогда подкоренное выражение большего корня автоматически будет больше нуля. Таким образом,

неравенство вида  $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$  равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

2. Иррациональные неравенства вида:  $\sqrt{f(x)} < g(x)$

равносильно системе неравенств: 
$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Аналогично, нестрогое неравенство  $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$  равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

3. Иррациональные неравенства вида:  $\sqrt{f(x)} > g(x)$ .

равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{cases}$$

Нестрогое неравенство вида  $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$  равносильно совокупности:

$$\begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (g(x))^2 \end{cases} \end{cases}$$

Рассмотрим примеры решения иррациональных неравенств.

Пример. Решить неравенство  $\sqrt{2x - x^2} < 5 - x$

Решение

$$\begin{cases} 5 - x > 0 \\ 2x - x^2 < (5 - x)^2 \\ 2x - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Решим каждое неравенство:

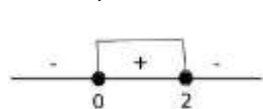
1)  $5 - x > 0$ ,  $x < 5$

2)  $2x - x^2 < (5 - x)^2$ ,  $2x^2 - 12x + 25 > 0$

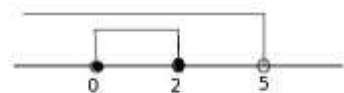
$D = 144 - 200 < 0$ , следовательно, это неравенство верно при любом значении  $x$ .

3)  $2x - x^2 \geq 0$

$x_1 = 0$   $x_2 = 2$



Совместим решения первого и третьего неравенств системы на одной координатной прямой:



Ответ:  $0 \leq x \leq 2$ .

Задание:

3. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
4. Решить задачи (по вариантам)

| Вариант 1.                              | Вариант 2.                               |
|-----------------------------------------|------------------------------------------|
| Решите уравнение:                       |                                          |
| 1. $\sqrt{x+4} = \sqrt{2x-1}$           | 1. $\sqrt{x+6} = \sqrt{2x-4}$            |
| 2. $\sqrt{2x+3} = x$                    | 2. $\sqrt{6-x} = x$                      |
| 3. $\sqrt{x^2-3x+2} = \sqrt{2x^2-3x+1}$ | 3. $\sqrt{2x^2-2x+1} = \sqrt{3x^2-4x-2}$ |
| 4. $\sqrt{x+2} = 8-3x$                  | 4. $\sqrt{1-x} = 3x+1$                   |
| Решите неравенство:                     |                                          |
| 1. $\sqrt{3x+1} < 5$                    | 1. $\sqrt{2x-1} > 3$                     |
| 2. $\sqrt{3x^2-4x+1} \leq 0$ ;          | 2. $\sqrt{x^2-5x+6} \leq 0$              |
| 3. $\sqrt{x^2+9} \leq 4$                | 3. $\sqrt{16-x^2} \geq 3$                |
| 4. $\sqrt{x-1} < \sqrt{5-x}$            | 4. $\sqrt{7-x} > \sqrt{x-3}$             |

Критерии оценки:

- «3» - 4-5 верно выполненных заданий
- «4» - 6-7 верно выполненных заданий
- «5» - 8 верно выполненных заданий

***Практическое занятие №9 «Степенная функция и ее график».***

**Цель работы:** повторить все виды степенной функции, закрепить умения и навыки строить графики степенных функций и взаимно обратных функций

**Краткие теоретические сведения**

Степенная функция — это функция вида  $y = x^p$ , где  $p$  — заданное действительное число.

Свойства степенной функции

1. Если показатель  $p = 2n$  — четное натуральное число:
  - область определения — все действительные числа, т. е. множество  $\mathbb{R}$ ;
  - множество значений — неотрицательные числа, т. е.  $y \geq 0$ ;
  - функция четная;
  - функция является убывающей на промежутке  $x \leq 0$  и возрастающей на промежутке  $x \geq 0$ .

*Пример функции с показателем  $p = 2n$ :  $y = x^4$ .*

2. Если показатель  $p = 2n - 1$  — нечетное натуральное число:
  - область определения — множество  $\mathbb{R}$ ;

- множество значений — множество  $\mathbb{R}$ ;
- функция нечетная;
- функция является возрастающей на всей действительной оси.

*Пример функции с показателем  $p = 2n - 1$ :  $y = x^5$ .*

3. Если показатель  $p = -2n$ , где  $n$  — натуральное число:

- область определения — множество  $\mathbb{R}$ , кроме  $x = 0$ ;
- множество значений — положительные числа  $y > 0$ ;
- функция четная;
- функция является возрастающей на промежутке  $x < 0$  и убывающей на промежутке  $x > 0$ .

*Пример функции с показателем  $p = -2n$ :  $y = 1/x^2$ .*

4. Если показатель  $p = -(2n - 1)$ , где  $n$  — натуральное число:

- область определения — множество  $\mathbb{R}$ , кроме  $x = 0$ ;
- множество значений — множество  $\mathbb{R}$ , кроме  $y = 0$ ;
- функция нечетная;
- функция является убывающей на промежутках  $x < 0$  и  $x > 0$ .

*Пример функции с показателем  $p = -(2n - 1)$ :  $y = 1/x^3$ .*

5. Если показатель  $p$  — положительное действительное нецелое число:

- область определения — неотрицательные числа  $x \geq 0$ ;
- множество значений — неотрицательные числа  $y \geq 0$ ;
- функция является возрастающей на промежутке  $x \geq 0$ .

*Пример функции с показателем  $p$ , где  $p$  — положительное действительное нецелое число:  $y = x^{4/3}$ .*

6. Если показатель  $p$  — отрицательное действительное нецелое число:

- область определения — положительные числа  $x > 0$ ;
- множество значений — положительные числа  $y > 0$ ;
- функция является убывающей на промежутке  $x > 0$ .

*Пример функции с показателем  $p$ , где  $p$  — отрицательное действительное нецелое число:  $y = x^{-1/3}$ .*

### Задание:

1. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
2. Решить задачи (по вариантам)

### **Вариант 1.**

1. Изобразить схематически графики следующих функций:

- 1)  $y = x^7$ ,
- 2)  $y = x^6$ ,
- 3)  $y = x^{-8}$ ,
- 4)  $y = x^{-2/7}$ ,
- 5)  $y = x^{11}$ ,
- 6)  $y = x^{3/5}$ .

2. В одной системе координат постройте график функции  $y = 4x + 1$  и график функции, обратной к ней.

### Вариант 2.

1. Изобразить схематически графики следующих функций:

- 1)  $y = x^{-7}$ ,
- 2)  $y = x^{6/7}$ ,
- 3)  $y = x^{-18}$ ,
- 4)  $y = x^{12}$ ,
- 5)  $y = x^9$ ,
- 6)  $y = x^{-3/5}$ .

2. В одной системе координат постройте график функции  $y = 2x - 1$  и график функции, обратной к ней.

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных заданий

«4» - 5-6 верно выполненных заданий

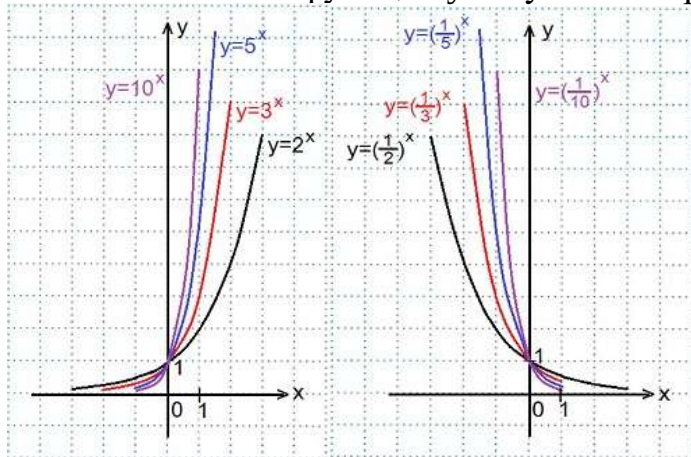
«5» - 7 верно выполненных заданий

### *Практическое занятие №10 «Показательная функция и ее график».*

**Цель работы:** закрепить умения и навыки строить графики показательных функций и описывать их свойства.

#### **Краткие теоретические сведения**

- Функцию вида  $y = a^x$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x$  – любое число, называют показательной функцией.
- Область определения показательной функции:  $D(y) = \mathbb{R}$  – множество всех действительных чисел.
- Область значений показательной функции:  $E(y) = \mathbb{R}_+$  – множество всех положительных чисел.
- Показательная функция  $y = a^x$  возрастает при  $a > 1$ .
- Показательная функция  $y = a^x$  убывает при  $0 < a < 1$ .



Задание:

1. Изучить теоретические положения, примеры решения задач

## 2. Решить задачи (по вариантам)

### Вариант 1.

Постройте графики функций

а)  $y = 3^x$ ; б)  $y = (\frac{1}{3})^x$ ; в)  $y = 3^x + 2$ ; г)  $y = 3^x - 1$ ; д)  $y = 3^{x+1}$ .

Опишите основные свойства каждой из них.

### Вариант 2.

Постройте графики функций

а)  $y = 4^x$ ; б)  $y = (\frac{1}{4})^x$ ; в)  $y = 4^x + 1$ ; г)  $y = 4^x - 2$ ; д)  $y = 4^{x-1}$

Опишите основные свойства каждой из них.

Критерии оценки:

«3» - 3 верно выполненных заданий

«4» - 4 верно выполненных заданий

«5» - 5 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №11 «Решение показательных уравнений и неравенств».***

**Цель работы:** закрепление умений и навыков применять алгоритм при решении показательных уравнений и неравенств различного вида.

#### **Краткие теоретические сведения**

Из свойств показательной функции знаем, что ее область значений ограничена положительными числами. Тогда если  $b = 0$  или  $b < 0$ , то уравнение не имеет решений. Теперь положим, что  $b > 0$ . Если в показательной функции основание  $a > 1$ , то функция будет возрастающей на всей области определения. Если в показательной функции для основания  $a$  выполнено следующее условие  $0 < a < 1$ , то данная функция будет убывающей на всей области определения.

Исходя из этого и применяя теорему о корне, получим, что уравнение  $a^x = b$  имеет один единственный корень, при  $b > 0$  и положительном  $a$  не равном единице. Чтобы его найти, необходимо представить  $b$  в виде  $b = a^c$ . Тогда очевидно, что  $c$  будет являться решением уравнения  $a^x = a^c$ .

Пример № 1:  $5^{x+1} = 25$ .

Представим 25 как  $5^2$ , получим  $5^{x+1} = 5^2$ .

Это равносильно  $x + 1 = 2$ . Решаем уравнение. Получаем корень  $x = 1$ .

Ответ: 1.

Пример № 2. Вынесение общего множителя за скобки.

Примечание: выносим за скобки множитель с меньшим показателем.

$$3^{x+3} - 3^x = 78;$$

$$3^x(3^3 - 1) = 78;$$

$$3^x \cdot 26 = 78;$$

$$3^x = 3;$$

$$x = 1.$$

Ответ: 1

Пример 3. Уравнения, сводящиеся к квадратным.

$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ . Заменим  $t = 2^x$  и получим следующее квадратное уравнение:  
 $t^2 - 5t + 4 = 0$ .

Решаем это уравнение. Получаем корни  $t_1 = 1$   $t_2 = 4$  Теперь решаем уравнения  $2^x = 1$  и  $2^x = 4$ .

Ответ: 0;2.

Решение простейших показательных неравенств основывается тоже на свойствах возрастания и убывания функции. Если в показательной функции основание  $a > 1$ , то функция будет возрастающей на всей области определения. Если в показательной функции для основания  $a$  выполнено следующее условие  $0 < a < 1$ , то данная функция будет убывающей на всей области определения.

Рассмотрим пример: решить неравенство  $(0,5)^{(7-3x)} < 4$ .

Заметим, что  $4 = (0,5)^{-2}$ . Тогда неравенство примет вид  $(0,5)^{(7-3x)} < (0,5)^{(-2)}$ . Основание показательной функции 0,5 меньше единицы, следовательно, она убывает. В этом случае надо поменять знак неравенства и не записывать только показатели. Получим:  $7 - 3x > -2$ . Отсюда:  $x < 3$ .

Ответ:  $x < 3$ .

Если бы в неравенстве основание было больше единицы, то при избавлении от основания, знак неравенства менять было бы не нужно.

Задание:

3. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
4. Решить задачи (по вариантам)

| Вариант 1.                                                                                                                                 | Вариант 2.                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Решите уравнение                                                                                                                           |                                                                                                                                               |
| 1) $4^x = 64$ ;<br>2) $25^x = 1/5$ ;<br>3) $(0,2)^x = 25$ ;<br>4) $4^{x+1} + 4^x + 4^{x-1} = 84$ ;<br>5) $5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 15 = 0$ . | 1) $5^x = 125$ ;<br>2) $16^x = 1/4$ ;<br>3) $(0,2)^x = 1/25$ ;<br>4) $5^{x+1} - 5^x + 5^{x-1} = 105$ ;<br>5) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$ . |
| Решите неравенства                                                                                                                         |                                                                                                                                               |
| 1) $6^x > 36$ ;<br>2) $(0,3)^x \geq 0,09$ ;<br>3) $(0,2)^x > 125$ ;<br>4) $3^{x+2} - 3^x < 24$ ;<br>5) $4^x + 2^x - 6 \geq 0$ .            | 1) $4^x < 64$ ;<br>2) $(0,4)^x \leq 0,16$ ;<br>3) $(0,5)^x > 64$ ;<br>4) $4^{x+2} + 4^{x+1} > 20$ ;<br>5) $9^x + 3^x - 2 \leq 0$ .            |

Критерии оценки:

«3» - 5-6 верно выполненных заданий

«4» - 7-8 верно выполненных заданий

«5» - 9-10 верно выполненных заданий

**Практическое занятие №12 «Решение показательных уравнений и неравенств и их систем».**

**Цель работы:** закрепить умения и навыки решать системы показательных уравнений и неравенств.

**Краткие теоретические сведения**

Обязательным при решении системы показательных уравнений является, преобразование данной системы в систему простейших уравнений. Например, решите систему уравнений

$$1) \begin{cases} 2^x + 2^{y+1} = 10, \\ y - x = 1. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ 2^x + 2^{(x+1)+1} = 10; \end{cases}$$

Выразим  $y$  через  $x$  из (2) -го уравнения системы и подставим это значение в (1) -ое уравнение системы.

Решаем (2) -ое уравнение полученной системы:

$$2^x + 2^{x+2} = 10, \text{ применяем формулу: } a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

$$2^x + 2^x \cdot 2^2 = 10, \text{ вынесем общий множитель } 2^x \text{ за скобки:}$$

$$2^x(1 + 2^2) = 10 \text{ или } 2^x \cdot 5 = 10, \text{ отсюда } 2^x = 2.$$

$$2^x = 2^1, \text{ отсюда } x = 1. \text{ Возвращаемся к системе уравнений.}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

$$(1; 2).$$

Ответ: (1; 2).

**Задание:**

1. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
2. Решить задачи (общее задание)

Решить систему уравнений:

1.  $\begin{cases} 2^{x-y} = 16 \\ 4^{x+2y} = 32 \end{cases}$
2.  $\begin{cases} 5 \cdot 2^x + 3^x = 13 \\ 7 \cdot 2^x - 3^x = 11 \end{cases}$

$$3. \begin{cases} x - y = 1 \\ 4^{2x-3y} = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$$

Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0 \\ 5^{\frac{x-3}{x+1}} \leq 0,2 \end{cases}$$

Критерии оценки:

«3» - 3 верно выполненных заданий

«4» - 4 верно выполненных заданий

«5» - 5 верно выполненных заданий

### Практическое занятие №13

#### «Логарифмирование и потенцирование выражений».

**Цель работы:** закрепить умения и навыки находить логарифмы по определению, применять свойства, основное логарифмическое тождество.

#### Краткие теоретические сведения

Логарифм положительного числа  $b$  по основанию  $a$  — это показатель степени, в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить число  $b$   
 $\log_a b$ ,  $b > 0, a > 0, a \neq 1$ .

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \log_a a^x = x$$

Примеры:  $\log_2 8 = 3$ , так как  $2^3 = 8$ ,  $\log_5 \frac{1}{5} = -1$ , так как  $5^{-1} = \frac{1}{5}$

Десятичный логарифм — это логарифм по основанию 10

$$\lg 100 = 2$$

Натуральный логарифм — логарифм с основанием  $e$ , обозначается  $\ln$

Свойства логарифма

|                                            |                                       |                                        |
|--------------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|
| $a^{\log_a b} = b$                         | $\log_a b^m = m \log_a b$             |                                        |
| $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$        | $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ | $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ |
| $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ | $\log_{a^n} b^n = \log_a b$           | $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$        |

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

$$8^{2 \log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$$

Логарифм произведения — это сумма логарифмов

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_3 8,1 + \log_3 10 = \log_3 (8,1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$$

Логарифм частного — это разность логарифмов

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$$

Свойства степени логарифмируемого числа и основания логарифма

Показатель степени логарифмируемого числа  $\log_a b^m = m \log_a b$

Показатель степени основания логарифма  $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$

Переход к новому основанию

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \log_{0,8} 3 \cdot \frac{\log_{0,8} 1,25}{\log_{0,8} 3} = \log_{0,8} 1,25 = \log_{\frac{4}{8}} \frac{5}{4} = -1$$

Задание:

5. Изучить теоретические положения, примеры решения задач

6. Решить задачи (по вариантам)

|     | Вариант 1.                                                       | Вариант 2.                                    |
|-----|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
|     | Вычислите логарифмы:                                             |                                               |
| 1.  | $\log_2 1024$                                                    | $\log_7 343$                                  |
| 2.  | $\log_{34} 1$                                                    | $\log_{26} 1$                                 |
| 3.  | $\log_{0,5} 0,625$                                               | $\log_{0,3} 0,027;$                           |
| 4.  | $\log_8 \frac{1}{64}$                                            | $\log_6 \frac{1}{36};$                        |
| 5.  | $\log_7 \sqrt{7}$                                                | $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{343}$            |
| 6.  | $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$                                | $\log_{\frac{1}{2}} 64.$                      |
| 7.  | $\log_{\frac{1}{3}} 81$                                          | $\log_5 \sqrt{5};$                            |
| 8.  | $\log_2 32 + \log_2 2$                                           | $\log_6 12 + \log_6 3$                        |
| 9.  | $\log_5 35 - \log_5 7$                                           | $\log_4 36 - \log_4 9$                        |
| 10. | $\log_7 \sqrt[4]{49}$                                            | $\log_8 \sqrt[5]{64}$                         |
| 11. | $\log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_5 \sqrt{125} - \log_3 \frac{1}{81}$ | $\log_2 8 - \log_4 \sqrt{64} + \log_{0,1} 10$ |
| 12. | $\lg 10000$                                                      | $\lg 1000$                                    |
|     | Упростите выражение:                                             |                                               |
| 1.  | $10^{\lg 0,3}$                                                   | $10^{\lg 0,9}$                                |
| 2.  | $10^{2+\lg 0,4}$                                                 | $10^{3+\lg 0,5}$                              |
| 3.  | $10^{\lg 3 - \lg 2}$                                             | $10^{\lg 5 - \lg 4}.$                         |

|    |                                             |                          |
|----|---------------------------------------------|--------------------------|
|    | Прологарифмируйте выражение по основанию 10 |                          |
| 1. | $x = 2a^3 \sqrt[3]{c^2}$ .                  | $x = 2a^4 \sqrt[5]{c^3}$ |

Критерии оценки:

«3» - 8-11 верно выполненных заданий

«4» - 12-14 верно выполненных заданий

«5» - 15-16 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №9 «Логарифмическая функция».***

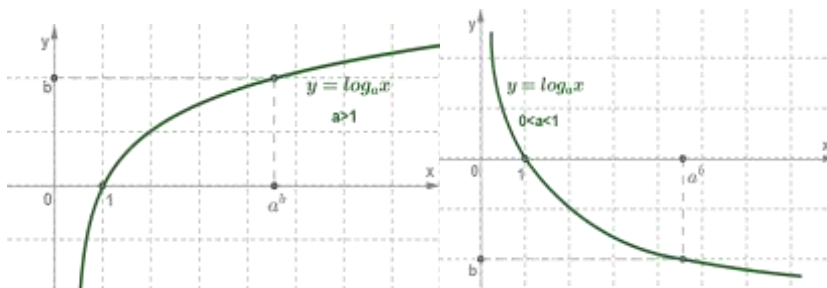
**Цель работы:** закрепить умения и навыки строить и исследовать графики логарифмических функций.

#### **Краткие теоретические сведения**

Функцию, заданную формулой  $y = \log_a x$ , называют логарифмической функцией с основанием  $a$ , ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).

Основные свойства логарифмической функции:

1. Областью определения логарифмической функции будет являться все множество положительных вещественных чисел. Для краткости его еще обозначают  $R^+$ .
2. Областью значения логарифмической функции будет являться все множество вещественных чисел.
3. Если основание логарифмической функции  $a > 1$ , то на всей области определения функции возрастает. Если для основания логарифмической функции выполняется следующее неравенство  $0 < a < 1$ , то функция убывает на всей области определения.
4. График логарифмической функции всегда проходит через точку  $(1; 0)$ .
5. Возрастающая логарифмическая функция, будет положительной при  $x > 1$ , и отрицательной при  $0 < x < 1$ .
6. Убывающая логарифмическая функция, будет отрицательной при  $x > 1$ , и положительной при  $0 < x < 1$ .
7. Функция не является четной или нечетной. Логарифмическая функция – функция общего вид.



#### Задание:

1. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
2. Математический диктант (общее задание)

Зачитывается утверждение, если оно верно, то поставить «+», если неверно «-».

1. Логарифмическая функция  $y = \log_a x$  определена при любом  $x$ .
2. Функция  $y = \log_a x$  определена при  $a > 0, a \neq 1, x > 0$ .
3. Областью определения логарифмической функции является множество действительных чисел.
4. Областью значений логарифмической функции является множество действительных чисел.
5. Логарифмическая функция – четная.
6. Логарифмическая функция – нечетная.
7. Функция  $y = \log_a x$  -возрастающая при  $a > 1$ .
8. Функция  $y = \log_a x$  при положительном, но меньшем единицы основании,- возрастающая.
9. Логарифмическая функция имеет экстремум в точке  $(1;0)$ .
10. График функции  $y = \log_a x$  пересекается с ось  $Ox$ .
11. График логарифмической функции находится в верхней полуплоскости.
12. График логарифмической функции симметричен относительно оси  $Ox$ .
13. График функции  $y = \log_a x$  пересекает ось  $Ox$  в точке  $(1;0)$ .
14. График логарифмической функции находится в 1 и 4 четвертях.
15. Существует логарифм отрицательного числа.
16. Существует логарифм дробного положительного числа.
17. График логарифмической функции проходит через точку  $(0; 0)$ .

Критерии оценки:

«3» - 10-14 верно выполненных заданий

«4» - 13-15 верно выполненных заданий

«5» - 16-17 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №15 «Решение логарифмических уравнений».***

**Цель работы:** закрепить умения и навыки решения логарифмических уравнений.

#### **Краткие теоретические сведения**

Уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма (в основании логарифма), называются логарифмическими.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$\log_a x = b$ , где  $a$  и  $b$  — *данные числа*,  $x$  — *неизвестное*.

Уравнение имеет решение, если  $a > 0, a \neq 1: x = a^b$

Решение более сложных логарифмических уравнений обычно сводится либо к решению алгебраических уравнений, либо к решению уравнений вида  $\log_a x = b$ .

Основные способы решения логарифмических уравнений:

1. равносильные преобразования
2. переход к уравнению-следствию
3. замена переменной
4. разложение на множители

Примеры решения логарифмических уравнений:

а)  $\log_3(5x - 1) = 2$ .

Решение:

$$\text{ОДЗ: } 5x - 1 > 0; x > 1/5; x \in (0,2; \infty).$$

$$\log_3(5x - 1) = 2,$$

$$\log_3(5x - 1) = \log_3 3^2,$$

$$5x - 1 = 9,$$

$$x = 2, 2 \in (0,2; \infty).$$

Ответ: 2.

б)  $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3$ .

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x - 5 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

$$x \in (5; \infty).$$

$$\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3,$$

$$\log_2((x - 5)(x + 2)) = \log_2 2^3,$$

$$(x - 5)(x + 2) = 8,$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0,$$

$$x_1 = 6, 6 \in (5; \infty),$$

$$x_2 = -3, -3 \notin (5; \infty).$$

следовательно,  $x = -3$  - посторонний корень.

Ответ: 6.

в)  $\log_3^2 x - 3\log_3 x - 10 = 0$

$\log_3 x$  обозначить через  $y$ , то оно сведется к квадратному уравнению  $y^2 - 3y - 10 = 0$ , откуда  $y_1 = -2$ ,  $y_2 = 5$ . Вспоминая, что  $y = \log_3 x$ , получаем: если  $\log_3 x = -2$ , то  $x = 1/9$ ; если же  $\log_3 x = 5$ , то  $x = 243$ .

Проверкой легко установить, что оба эти значения  $x$  удовлетворяют данному уравнению. Ответ.  $x_1 = 1/9$ ;  $x_2 = 243$ .

Задание:

1. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
2. Решить задачи (по вариантам)

| Вариант1.        | Вариант2.        |
|------------------|------------------|
| Решите уравнение | Решите уравнение |
| $\log_2 x = 3$   | $\log_3 x = -1$  |
| $\log_5(2x) = 1$ | $\log_7 x = 0$   |

|                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| $\log_2(3x-1) = \log_2(x+1)$    | $\log_2(3x+1) = \log_2(x-1)$    |
| $\log_5 \log_2 x = 1$           | $\log_2 \log_3 x = 1$           |
| $\log_3(x^2 - 1) = 1$           | $\log_5(x^2 + 1) = 1$           |
| $\log^2_3 x - \log_3 x - 2 = 0$ | $\log^2_5 x - \log_5 x - 2 = 0$ |
| $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2$      | $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$ |

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных заданий

«4» - 5-6 верно выполненных заданий

«5» - 7 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №16 «Решение логарифмических неравенств».***

**Цель работы:** закрепить умения и навыки решения логарифмических неравенств.

#### **Краткие теоретические сведения**

Логарифмическим неравенством называется неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма.

Алгоритм решения логарифмических неравенств:

а) Найти область определения неравенства (подлогарифмическое выражение больше нуля).

б) Представить (если возможно) левую и правую части неравенства в виде логарифмов по одному и тому же основанию.

в) Определить, возрастающей или убывающей является логарифмическая функция: если  $a > 1$ , то возрастающая; если  $0 < a < 1$ , то убывающая.

г) Перейти к более простому неравенству (подлогарифмическим выражениям), учитывая, что знак неравенства сохранится, если функция возрастает, и изменится, если она убывает.

Примеры решения логарифмических неравенств:

1.  $\log_5(3x-1) < 1$ .

Так как  $1 = \log_5 5$  и основание  $5 > 0$ , то  $\log_5(3x-1) < \log_5 5$

$$\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ 3x - 1 < 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 1 < 5 \end{cases}$$

$$1/3 < x < 2.$$

Ответ:  $1/3 < x < 2$ .

Задание:

3. Изучить теоретические положения, примеры решения задач

4. Решить задачи (по вариантам)

| <b>Вариант1.</b>                                              | <b>Вариант2.</b>                                                  |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Решите неравенство<br>$\log_5(x-3) < 2$<br>$\log_8(2x-7) > 1$ | Решите неравенство<br>$\log_{0,5}(2x-4) > -1$<br>$\lg(1-x) < 1$ . |

|                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| $\log_5(2x) > 0$                | $\log_7 x < 0$                  |
| $\log_2(3x+1) \geq \log_2(x-1)$ | $\log_2(3x-1) \leq \log_2(x+1)$ |
| $\lg^2 x + 3 \lg x - 4 < 0$     | $\lg^2 x + 3 \lg x - 4 > 0$     |

Критерии оценки:

«3» - 3 верно выполненных заданий

«4» - 4 верно выполненных заданий

«5» - 5 верно выполненных заданий

### **Практическое занятие №17 «Параллельность прямых и плоскостей».**

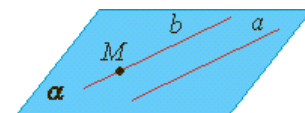
**Цель работы:** закрепить определения и теоремы о параллельных прямых и плоскостях.

#### **Краткие теоретические сведения**

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

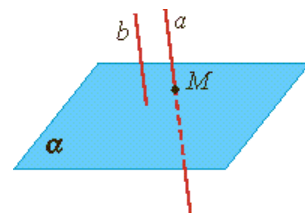
Теорема о параллельных прямых.

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.



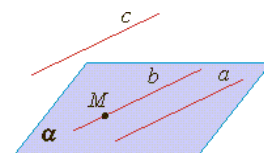
Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми.

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



Теорема о трех прямых в пространстве.

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны (если  $a \parallel c$  и  $b \parallel c$ , то  $a \parallel b$ ).



Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

**Определение.** Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Параллельность плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  обозначается так:  $\alpha \parallel \beta$ . Признак параллельности двух плоскостей.

**Теорема.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Свойства параллельных плоскостей:

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

2. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

Задание:

5. Изучить теоретические положения.
6. Математический диктант (общее задание)

Вопросы:

1. Две прямые в пространстве называются параллельными, если....
2. Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если....
3. Две пересекающиеся прямые лежат в ....
4. Две прямые в пространстве могут:  
а) иметь...точку; б) не иметь...точек.
5. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом....
6. Если прямые  $a$  и  $b$  имеют две общие точки, то они...
7. Верна ли формулировка признака параллельности прямой и плоскости: «Прямая, параллельная какой-либо прямой на плоскости, параллельна и самой плоскости».
8. Прямые  $a$  и  $b$  параллельны. Какое положение может занимать прямая  $a$  относительно плоскости, проходящей через прямую  $b$ .
9. Дана прямая и две пересекающиеся плоскости. Охарактеризовать все случаи их взаимного расположения.
10. Одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости. Можно ли утверждать, что и вторая прямая параллельна этой плоскости? Ответ обоснуйте.
11. Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, пересекающая две данные плоскости по параллельным прямым?

Критерии оценки:

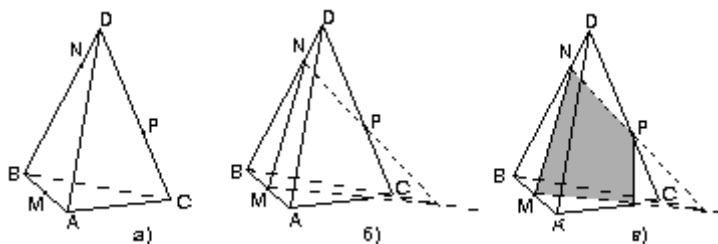
- «3» - 5-7 верно выполненных заданий  
«4» - 8-9 верно выполненных заданий  
«5» - 10-11 верно выполненных заданий

***Практическое занятие №18 «Задачи на построение сечений».***

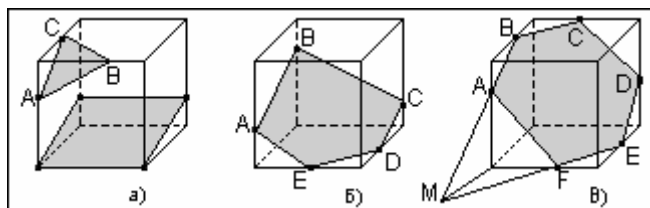
**Цель работы:** закрепить умения и навыки построения сечений тетраэдра и параллелепипеда.

**Краткие теоретические сведения**

Задача 1. Точки  $M$ ,  $N$  и  $P$  лежат соответственно на рёбрах  $AB$ ,  $BD$  и  $CD$  тетраэдра  $ABCD$ . Построить сечение тетраэдра плоскостью  $MNP$ .



Задача 2. На рёбрах параллелепипеда даны три точки А, В и С. Построить сечение параллелепипеда плоскостью АВС.



Задание:

1. Изучить примеры решения задач
2. Решить задачи (по вариантам)

### Вариант 1.

1. Дан тетраэдр МАВС. Постройте сечение тетраэдра, плоскостью, проходящей через точку М, точку N, принадлежащую грани АМВ и точку Р, принадлежащую грани АМС.
2. Используя чертеж параллелепипеда, определите вид плоской фигуры, которая получается при пересечении параллелепипеда плоскостью, параллельной одной из его граней, и изобразите сечение на рисунке;
3. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки (выберите их самостоятельно), лежащие соответственно на ребрах АВ, АD,  $DD_1$ ;

### Вариант 2.

1. Дан тетраэдр МАВС. Постройте сечение тетраэдра, плоскостью, проходящей через точку М, точку N, принадлежащую ребру АС и точку Р, принадлежащую грани ВМС.
2. Используя чертеж параллелепипеда, определите вид плоской фигуры, которая получается при пересечении параллелепипеда плоскостью, параллельной одному из его ребер и изобразите сечение на рисунке.
3. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки (выберите их самостоятельно), лежащие соответственно на ребрах АD, ВС,  $B_1 C_1$ ;

Критерии оценки:

- «3» - 1 верно выполненное задание  
 «4» - 2 верно выполненных заданий

«5» - 3 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №19 «Задачи на построение сечений в профессиональной деятельности».***

**Цель работы:** развитие логического мышления, пространственного воображения, необходимыми для будущей профессиональной деятельности

#### **Краткие теоретические сведения**

Обыкновенная железнодорожная насыпь в поперечном разрезе имеет трапециевидальное сечение. На рис. 1 даны общий вид и поперечное сечение насыпи с водоотводными сооружениями и расположенным на ней верхним строением.

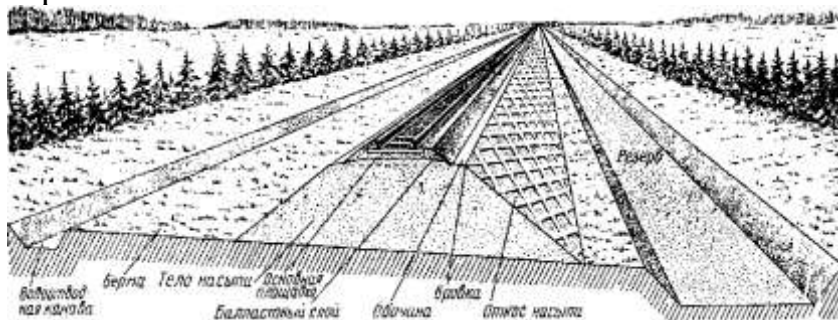


Рис.1. Общий вид и поперечный разрез насыпи

На основной площадке земляного полотна устраивают сливную призму трапециевидального очертания шириной поверху 2,3 м и высотой 15 см на однопутных участках и треугольного очертания высотой 20 см на двухпутных участках. Такое очертание поверхности основной площадки земляного полотна придают для быстрого стока с нее воды. Треугольное очертание сливной призмы больше соответствует этому назначению. Однако в связи с тем, что шпалы и рельсы укладывают раньше, чем балласт, для удобства укладки на однопутных участках основную площадку обрабатывают по трапеции.

Остающиеся свободными части основной площадки между верхним строением и откосами насыпи называются обочинами. Граница между основной площадкой и откосом насыпи называется бровкой насыпи.

Полоса земли, на которую опирается насыпь, называется основанием ее, а линия сопряжения откоса насыпи с основанием — подошвой откоса.

Высота насыпи измеряется от основания до уровня бровок по оси земляного полотна.

Горизонтальная проекция линии откоса называется заложением откоса, а отношение высоты его к заложению (т. е. вертикальной проекции откоса к горизонтальной) — крутизной откоса.

Для выражения крутизны откоса обычно высоту принимают за единицу. В таком случае крутизна будет выражаться отношением 1 : п, в котором буквой «п» обозначено число, показывающее, во сколько раз заложение больше высоты.

Вдоль насыпей, на некотором расстоянии от подошвы откоса, устраивают

ВОДООТВОДНЫЕ КАНАВЫ.

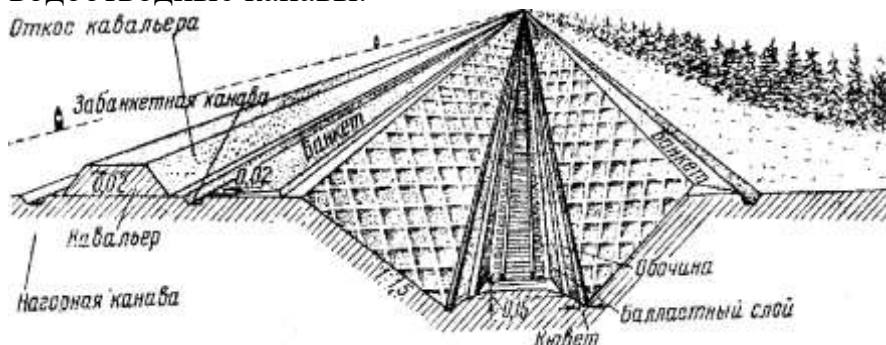


Рис. 2. Общий вид и поперечный разрез выемки

Задание:

1. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
2. Решить задачи (общее задание)

Построить поперечное сечение железнодорожной насыпи, подписать его основные элементы.

Решить задачу: Сечение железнодорожной насыпи имеет форму трапеции, нижнее основание которой 14 м, а верхнее 8 м и высота 3,2 м. Определите, сколько кубических метров земли необходимо для строительства 1 км насыпи.

Критерии оценки:

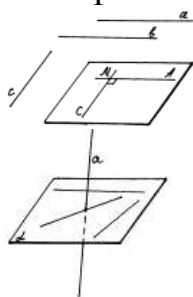
- «3» - 50-70% верно выполненных заданий
- «4» - 70-90% верно выполненных заданий
- «5» - 90-100% верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №20 «Решение задач на перпендикулярность прямых и плоскостей».***

**Цель работы:** закрепить умения и навыки применять определения и теоремы о перпендикулярных прямых и плоскостях при решении задач.

#### **Краткие теоретические сведения**

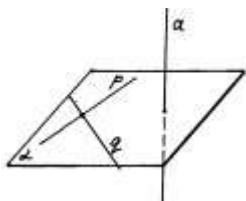
Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $90^\circ$ .



Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

**Лемма.** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.  
**Определение.** Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости.

**Признак перпендикулярности прямой и плоскости.**



Теорема. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

#### Задание:

1. Изучить теоретические положения
2. Решить задачи (по вариантам)

#### **Вариант 1.**

1. Параллельные прямые  $a$  и  $c$  лежат в плоскости  $\alpha$ , а прямая  $a$  перпендикулярна к прямой  $b$ . Верно ли утверждение:
  - а)  $a$  перпендикулярна к прямой  $c$ ;
  - в) прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$ .
2. Посчитать количество пар перпендикулярных прямых куба.
3. Точка  $O$  - центр симметрии параллелограмма  $ABCD$ . Точка  $P$  не лежит в плоскости параллелограмма. Известно, что  $PA=PC$ ,  $PB=PD$ . Докажите, что отрезок  $PO$  перпендикулярен плоскости параллелограмма.
4.  $ABCD$  – квадрат.  $AN \perp (ABC)$ . Найдите отрезок  $NC$ , если  $AB=\sqrt{10}$ , а  $AN=10\sqrt{2}$ .

#### **Вариант 2.**

1. Прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ , а прямая  $b$  перпендикулярна к этой плоскости. Верно ли утверждение, что прямые  $a$  и  $b$  взаимно перпендикулярны?
2. Диагональ  $BD$  ромба  $ABCD$  перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ . Как расположена по отношению к этой плоскости другая её диагональ?
3. Два отрезка  $AB$  и  $CD$ , лежащие в плоскости  $\alpha$ , в точке пересечения  $E$  делятся пополам. Вне плоскости дана точка  $K$  так, что  $KA=KB$  и  $KC=KD$ . Докажите, что прямая  $KE$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ .
4.  $ABCD$  – квадрат.  $BM \perp (ABC)$ . Найдите отрезок  $DM$ , если  $AB=\sqrt{12}$ , а  $BM=5$ .

#### Критерии оценки:

- «3» - 2 верно выполненных заданий
- «4» - 3 верно выполненных заданий
- «5» - 4 верно выполненных заданий

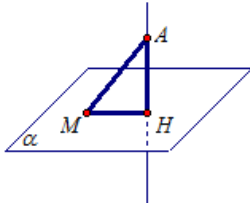
#### ***Практическое занятие №21 «Теорема о трех перпендикулярах»***

**Цель работы:** закрепить умения и навыки применять теорему о трех перпендикулярах при решении задач.

#### **Краткие теоретические сведения**

Рассмотрим плоскость  $\alpha$  и точку  $A$ , которая лежит вне этой плоскости. Как

известно, из точки  $A$  можно провести единственную прямую  $AH$  перпендикулярную плоскости  $\alpha$ . Проведем прямую  $AH$  перпендикулярно плоскости  $\alpha$ ,



Отрезок  $AH$  называется перпендикуляром, проведенным из точки  $A$  к плоскости  $\alpha$ .

Пусть точка  $M$  другая произвольная точка плоскости  $\alpha$ . Тогда отрезок  $AM$  называется наклонной, а отрезок  $MH$  называется проекцией наклонной  $AM$  на плоскость  $\alpha$ .

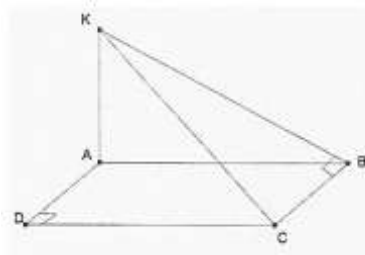
Расстоянием от точки  $A$  до плоскости  $\alpha$  называют длину перпендикуляра  $AH$ . Заметим, что  $AH$  – наименьшее из расстояний между точкой  $A$  и любой точкой плоскости. Действительно, в прямоугольном треугольнике  $AHM$  перпендикуляр (катет  $AH$ ) короче наклонной (гипотенузы  $AM$ ).

Теорема (о трех перпендикулярах).

Прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции, перпендикулярна и самой наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Задача 1.

Из вершины  $A$  квадрата  $ABCD$  восстановлен перпендикуляр  $AK$  к его плоскости. Докажите, что  $BC$  перпендикулярно  $BK$ .



Дано:

$ABCD$  – квадрат,  
 $AK \perp (ABCD)$ .

Доказать:  $BC \perp BK$ .

$AK \perp (ABCD)$  (по условию),  
 $BK$  – наклонная,  
 $AB$  – проекция  $BK$  на плоскость  $(ABCD)$ ,  
 $BC \perp AB$  (как смежные стороны квадрата),  
тогда  $BC \perp BK$  (по теореме о трех перпендикулярах).

Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример задачи
2. Решить задачи (по вариантам)

### Вариант 1.

1. Верно ли утверждение:

Если прямая перпендикулярна проекции наклонной, то эта прямая

перпендикулярна наклонной. (Если отвечаете «нет», то укажите, какие условия теоремы о трех перпендикулярах здесь не выполняется?) Сделайте рисунок.

2. Угол  $C$  треугольника  $ABC$  - прямой.  $AD$  - перпендикуляр к плоскости треугольника  $ABC$ . Докажите, что треугольник  $BCD$  - прямоугольный.

3. Из одной точки к плоскости проведены перпендикуляр, равный 12 см и две наклонные. Вычислите длины их проекций на данную плоскость, если угол между плоскостью и каждой наклонной равен соответственно  $45^\circ$  и  $60^\circ$

4. Высота прямоугольного треугольника  $ABC$ , опущенная на гипотенузу, равна 5. Из вершины  $C$  прямого угла восстановлен к плоскости треугольника  $ABC$  перпендикуляр  $CM$ , причем  $CM = 4$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до гипотенузы  $AB$ .

### Вариант 2.

1. Верно ли утверждение:

В пространстве можно построить три перпендикулярные прямые, проходящие через одну точку. Если отвечаете «да», то приведите пример известной вам модели фигуры.

2. Угол  $C$  треугольника  $MPC$  - прямой.  $MD$  - перпендикуляр к плоскости треугольника  $MPC$ . Докажите, что треугольник  $PCD$  - прямоугольный.

3. Из одной точки к плоскости проведены перпендикуляр, равный 8 см и две наклонные. Вычислите длины их проекций на данную плоскость, если угол между плоскостью и каждой наклонной равен соответственно  $45^\circ$  и  $30^\circ$

4. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  равен  $2\sqrt{2}$ . Из вершины прямого угла  $C$  восстановлен перпендикуляр  $CM$ , причем  $CM = 5$ . Найдите расстояние от точки  $M$  до гипотенузы  $AB$ .

Критерии оценки:

«3» - 2 верно выполненных заданий

«4» - 3 верно выполненных заданий

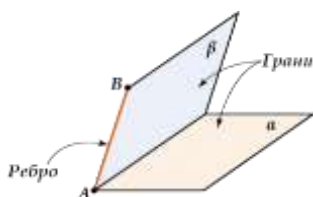
«5» - 4 верно выполненных заданий

### Практическое занятие №22 «Двугранный угол».

**Цель работы:** закрепить умения и навыки применять алгоритм при выполнении построений линейного угла двугранного угла.

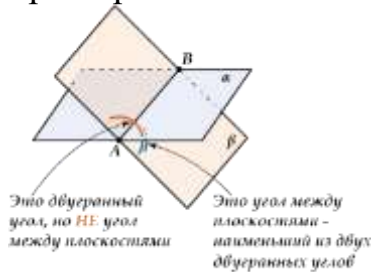
#### Краткие теоретические сведения

Двугранный угол – это фигура, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой



При этом прямая  $AB$  – это ребро двугранного угла, а полуплоскости  $\alpha$  и  $\beta$  — стороны или грани двугранного угла. Двугранный угол получает обозначение по своему ребру: «двугранный угол  $AB$ ».

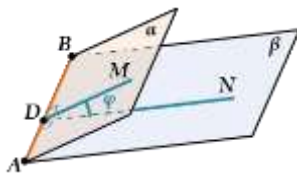
Угол между плоскостями – наименьший из двугранных углов, образованных при пересечении плоскостей.



Двугранный угол может быть и острым, и тупым, а угол между плоскостями только острым!

Как измерить двугранный угол?

Нужно поступить так: из произвольной точки на ребре двугранного угла провести в каждой плоскости по перпендикуляру к этому ребру.



В плоскости  $\alpha$  провели перпендикуляр  $MD$  к ребру  $AB$ . Что получилось?

Обычный, плоский угол  $\varphi$ . Вот этот угол и называется: линейный угол двугранного угла  $AB$ .

Двугранный угол измеряется величиной своего линейного угла.

Задание:

1. Изучить теоретические положения
2. Решить задачи (общее задание)
  1. Прямоугольник  $ABCD$  перегнули по диагонали  $AC$  так, что плоскости  $ABC$  и  $ACD$  оказались перпендикулярными. Найдите расстояние между точками  $B$  и  $D$ , если стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см.
  2. Параллельные прямые  $a$  и  $c$  лежат в плоскости  $\alpha$ . Через каждую из этих прямых проведена плоскость, перпендикулярная плоскости  $\alpha$ . Каково взаимное расположение полученных плоскостей?

3. Сторона  $BC$  прямоугольника  $ABCD$  служит стороной треугольника  $BSK$ , причем точка  $K$  проектируется на прямую  $CD$ . Укажите линейный угол двугранного угла  $BC$ .
4. Найдите множество точек, принадлежащих одной грани двугранного угла и удаленных от плоскости другой грани на расстояние  $a$ .

Критерии оценки:

- «3» - 2 верно выполненных заданий
- «4» - 3 верно выполненных заданий
- «5» - 4 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №23 «Решение задач на нахождение элементов призмы».***

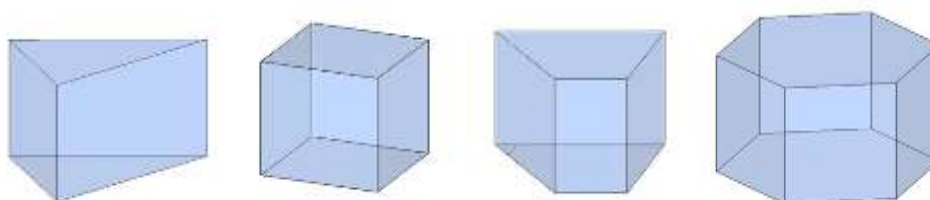
**Цель работы:** систематизировать знания учащихся о призмах, закрепить умения и навыки решать задачи на определение и свойства призмы.

#### **Краткие теоретические сведения**

Призма — многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.

Грани, которые находятся в параллельных плоскостях, называются основаниями призмы, а остальные грани — боковыми гранями призмы.

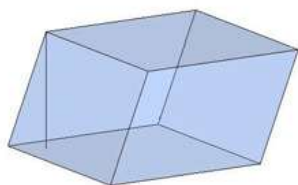
В зависимости от основания призмы бывают:



Треугольными, четырехугольными, шестиугольными

Призма с боковыми рёбрами, перпендикулярными её основаниям, называется прямой призмой.

Прямая призма называется правильной, если её основания — правильные многоугольники.



Призма, боковые рёбра которой не перпендикулярны основаниям, называется наклонной призмой.

Расстояние между основаниями призмы называется высотой призмы.

Высота прямой призмы совпадает с боковым ребром.

Высота наклонной призмы — это перпендикуляр, проведенный между основаниями призмы. Часто перпендикуляр проводят с одной из вершин верхнего основания.

Площадью полной поверхности призмы называют сумму площадей всех ее граней, а площадью боковой поверхности — сумму площадей ее боковых граней.

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

#### Задание:

1. Изучить теоретические положения.
2. Выполнить тест (по вариантам)

#### **Вариант 1.**

1. Какой из перечисленных многогранников не является призмой:  
а) параллелепипед;      б) тетраэдр;      в) куб.
2. Сколько ребер у шестиугольной призмы?  
а) 18;      б) 6;      в) 24
3. Какое наименьшее число граней может иметь призма?  
а) 3;      б) 9;      в) 5
4. Выберите верное утверждение;  
а) у  $n$ - угольной призмы  $2n$  граней;  
б) призма называется правильной, если ее основания- правильные многоугольники;  
в) перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой призмы.
5. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Каково расположение прямых  $B_1 D_1$  и  $AC$ ?  
а) пересекаются;      б) параллельны;      в) скрещиваются.
6. Три ребра параллелепипеда 3м, 4м и 5м. Найдите сумму длин всех ребер.  
а) 12;      б) 18;      в) 48.
7. Выберите верное утверждение:  
а) площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней;  
б) высота призмы равна ее боковому ребру;  
в) у треугольной призмы нет диагоналей.

#### **Вариант 2.**

1. Какой из перечисленных многогранников является призмой:  
а) параллелепипед;      б) тетраэдр;      в) пирамида
2. Сколько граней у шестиугольной призмы?  
а) 6;      б) 8;      в) 10
3. Какое наименьшее число ребер может иметь призма?

а) 9;            б) 8;            в) 7

4. Выберите верное утверждение;

а) площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей ее боковых граней;

б) у треугольной призмы две диагонали;

в) высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

5. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Сечение куба плоскостью, проходящей через ребро  $CC_1$  и точку пересечения диагоналей грани  $AA_1 D_1 D$  представляют собой:

а) пятиугольник;            б) четырехугольник;            в) треугольник.

6. Сколько двугранных углов имеет параллелепипед?

а) 6;            б) 9;            в) 12.

7. Выберите верное утверждение:

а) прямая призма называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник;

б) смежные грани параллелепипеда параллельны;

в) диагонали параллелепипеда скрещиваются.

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных заданий

«4» - 5-6 верно выполненных заданий

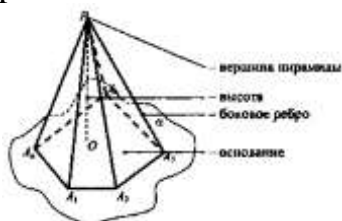
«5» - 7 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №24 «Решение задач на нахождение элементов пирамиды».***

**Цель работы:** систематизировать знания учащихся о пирамидах, закрепить умения и навыки решать задачи на определение и свойства пирамиды.

#### **Краткие теоретические сведения**

Рассмотрим многоугольник  $A_1 A_2 \dots A_n$  и точку  $P$ , не лежащую в плоскости этого многоугольника, получим  $n$  треугольников  $PA_1 A_2$ ,  $PA_2 A_3$ , ...,  $PA_n A_1$  (1). Многогранник, составленный из  $n$ -угольника  $A_1 A_2 \dots A_n$  и  $n$  треугольников (1), называется пирамидой. Многоугольник  $A_1 A_2 \dots A_n$  называется основанием, треугольники (1) - боковыми гранями пирамиды. Точка  $P$  называется вершиной пирамиды, а отрезки  $PA_1$ ,  $PA_2$ , ...,  $PA_n$  - ее боковыми ребрами.



Пирамиду с основанием  $A_1 A_2 \dots A_n$  и вершиной  $P$  обозначают так:  $PA_1 A_2 \dots A_n$ , и называют  $n$ -угольной пирамидой. Перпендикуляр, проведенный

из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды  $PH$ .

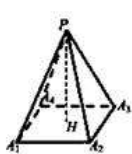


Рис. 1

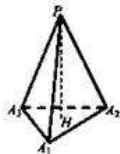


Рис. 2



Рис. 3

$PA_1A_2A_3A_4$  - четырехугольная пирамида (рис.1);  $PA_1A_2A_3$  - треугольная пирамида, тетраэдр (рис. 2);  $PA_1A_2A_3A_4A_5A_6$  - шестиугольная пирамида (рис. 3). Перпендикуляр  $PH$  - высота (рис. 1, рис. 2, рис. 3).

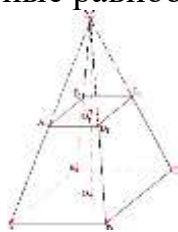
Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней. Площадью боковой поверхности пирамиды - сумма площадей ее боковых граней.

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды и пересекающая пирамиду, отсекает от нее подобную пирамиду. Другая часть пирамиды представляет собой многогранник, который называют усеченной пирамидой.

На рисунке изображена усеченная пирамида  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях  $(ABC)$  и  $(B_1 C_1 D_1)$ , называют основаниями усеченной пирамиды, остальные грани называют боковыми гранями. Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные многоугольники, боковые грани - трапеции. Усеченную пирамиду, которая получается из правильной пирамиды, также называют правильной. Боковые грани правильной усеченной пирамиды - равные равнобокие трапеции, их высоты называют апофемами.



Задание:

1. Изучить теоретические положения.
2. Выполнить тест (по вариантам)

### Вариант 1.

1. Сколько граней у шестиугольной пирамиды?  
а) 6;                      б) 7;                      в) 8.
2. Какое наименьшее число ребер может иметь пирамида?  
а) 6;                      б) 5;                      в) 4.
3. Выберите верное утверждение:

- а) Высота пирамиды называется апофемой;
  - б) боковые грани пирамиды – прямоугольники;
  - в) площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей ее боковых граней;
4. Боковые ребра треугольной пирамиды 3 см, 4 см, 7 см. Одно из них перпендикулярно к плоскости основания. Чему равна высота пирамиды?
- а) 7 см;                      б) 3 см;                      в) 4 см.
5. Какое из следующих утверждений неверно?
- а) площадь полной поверхности пирамиды называется суммой площадей всех ее граней;
  - б) перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды;
  - в) все грани пирамиды – треугольники.

### **Вариант 2.**

1. Сколько ребер у шестиугольной пирамиды?
- а) 6;                      б) 12;                      в) 18.
2. Какое наименьшее число граней может иметь пирамида?
- а) 5;                      б) 6;                      в) 4.
3. Выберите верное утверждение:
- а) Многогранник, составленный из  $n$  – угольников, называется пирамидой;
  - б) боковые грани пирамиды – треугольники;
  - в) площадью боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей всех ее граней;
4. Боковые ребра треугольной пирамиды 7 см, 12 см, 5 см. Одно из них перпендикулярно к плоскости основания. Чему равна высота пирамиды?
- а) 7 см;                      б) 12 см;                      в) 5 см.
5. Какое из следующих утверждений неверно?
- а) треугольная пирамида и тетраэдр – одно и то же;
  - б) существует четырехугольная пирамида, у которой противоположные боковые грани перпендикулярны к основанию;
  - в) площадью полной поверхности пирамиды называется суммой площадей всех ее граней.

Критерии оценки:

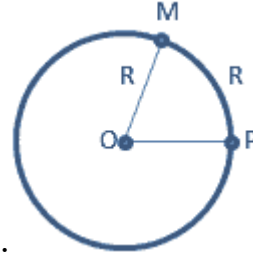
- «3» - 3 верно выполненных заданий
- «4» - 4 верно выполненных заданий
- «5» - 5 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №25 «Радианная мера угла».***

**Цель работы:** закрепить формулы перехода от градусной меры измерения углов к радианной и обратно; закрепить умения и навыки применять их при выполнении упражнений.

### **Краткие теоретические сведения**

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу



окружности, называется углом в 1 радиан.

Так как дуга длиной  $\pi R$  (полуокружность), стягивает центральный угол в  $180^\circ$ , то дуга длиной  $R$ , стягивает угол в  $\pi$  раз меньший, т.е.

$$1 \text{ рад} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ$$

И наоборот

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$$

Так как  $\pi = 3,14$ , то  $1 \text{ рад} = 57,3^\circ$

Если угол содержит  $a$  радиан, то его градусная мера равна

$$a \text{ рад} = \left( \frac{180}{\pi} \cdot a \right)^\circ$$

И наоборот

$$a^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot a \text{ рад}$$

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Например,  $360^\circ = 2\pi$  рад, пишут  $360^\circ = 2\pi$

Пример 1. Найти радианную меру угла равного, а)  $40^\circ$ , б)  $120^\circ$

Решение: а)  $40^\circ = 40 \cdot \pi / 180 = 2\pi/9$ ; б)  $120^\circ = 120 \cdot \pi / 180 = 2\pi/3$

Пример 2. Найти градусную меру угла выраженного в радианах а)  $\pi/6$ , б)  $\pi/9$

Решение: а)  $\pi/6 = 180^\circ/6 = 30^\circ$ ; б)  $\pi/9 = 180^\circ/9 = 20^\circ$

Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (по вариантам)

### Вариант 1.

1. Углы, заданные в градусной мере, переведите в радианную меру:

1)  $3^\circ$ ; 2)  $10^\circ$ ; 3)  $50^\circ$ ; 4)  $115^\circ$ ; 5)  $145^\circ$ ; 6)  $205^\circ$ ; 7)  $230^\circ$ ; 8)  $330^\circ$ ; 9)  $750^\circ$ .

2. Углы, заданные в радианной мере, переведите в градусную меру, указав с точностью до  $1^\circ$ .

1)  $\frac{5\pi}{8}$ ; 2)  $\frac{11\pi}{12}$ ; 3)  $0,5\pi$ ; 4)  $-\frac{100\pi}{6}$ ; 5)  $\frac{4\pi}{9}$ ; 6)  $\frac{21\pi}{4}$ ; 7)  $10$ ; 8)  $-4$ ; 9)  $-\frac{2}{3}$ .

## Вариант 2.

1. Углы, заданные в градусной мере, переведите в радианную меру:

1)  $5^\circ$ ; 2)  $20^\circ$ ; 3)  $70^\circ$ ; 4)  $105^\circ$ ; 5)  $135^\circ$ ; 6)  $200^\circ$ ; 7)  $220^\circ$ ; 8)  $310^\circ$ ; 9)  $700^\circ$ .

2. Углы, заданные в радианной мере, переведите в градусную меру, указав с точностью до  $1^\circ$ .

1)  $\frac{5\pi}{9}$ ; 2)  $\frac{4\pi}{15}$ ; 3)  $0,3\pi$ ; 4)  $-\frac{100\pi}{8}$ ; 5)  $\frac{3\pi}{8}$ ; 6)  $\frac{13\pi}{2}$ ; 7) 6; 8) -5; 9)  $-\frac{3}{8}$

Критерии оценки:

«3» - 9-13 верно выполненных примера

«4» - 14-17 верно выполненных примера

«5» - 17-18 верно выполненных примера

**Практическое занятие №26 «Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного угла».**

**Цель работы:** закрепить умения и навыки применять формулы зависимости между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсов одного угла при решении задач

### Краткие теоретические сведения

Зависимость между синусом и косинусом выражают следующие формулы:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Пример. Могут ли одновременно выполняться

равенства  $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$  и  $\cos \alpha = \frac{2}{5}\sqrt{6}$ .

Чтобы одновременно выполнялись эти равенства, необходимо выполнение условия

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Подставим данные значения в формулу и проверим верно ли равенство: .

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\sqrt{6}\right)^2 = 1;$$

$$\frac{1}{25} + \frac{24}{25} = 1;$$

$1=1$ , верно.

Ответ: данные равенства могут выполняться одновременно.

А какая же зависимость между тангенсом и котангенсом одного угла?

По определению :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$

Перемножим эти равенства и получим формулу, которая связывает тангенс и котангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

причём угол  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$  и  $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Из этих формул видно, что тангенс и котангенс являются взаимобратными числами.

Пример. Могут ли одновременно выполняться равенства  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{15}$  и  $\operatorname{ctg} \alpha = 7.5$ ? Подставляем данные значения в формулу (4) и получаем верное равенство.

$$\frac{2}{15} \cdot 7.5 = \frac{2 \cdot 7.5}{15} = 1.$$

Ответ: данные равенства могут выполняться одновременно.

А есть ли связь между тангенсом и косинусом? Рассмотрим

равенство  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

и обе части возведём в квадрат:  $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ . получаем:  $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha},$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1, \text{ где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (по вариантам)

### Вариант 1

1. Могут ли одновременно выполняться равенства?

- 1)  $\sin \alpha = \frac{2}{3}, \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3};$
- 2)  $\operatorname{tg} \alpha = 4, \operatorname{ctg} \alpha = -0.25,$
- 3)  $\sin \alpha = \frac{2}{3}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3},$
- 4)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}.$

2. Известно, что  $\cos \alpha = \frac{12}{13}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Найти  $\sin \alpha$

### Вариант 2.

1. Могут ли одновременно выполняться равенства?

- 1)  $\sin \alpha = \frac{12}{13}, \cos \alpha = -\frac{5}{13};$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} + 1, \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2} - 1,$$

$$3) \sin \alpha = \frac{1}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{5},$$

$$4) \cos \alpha = \frac{\pi}{4}, \sin \alpha = -\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4}$$

2. Известно, что  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ . Найти  $\cos \alpha$

Критерии оценки:

«3» - 3 верно выполненных примера

«4» - 4 верно выполненных примера

«5» - 5 верно выполненных примера

### **Практическое занятие №28 «Применение основных тригонометрических тождеств и формул приведения при решении задач».**

**Цель работы:** закрепить умения и навыки применять тригонометрические тождества и формулы приведения при решении задач.

#### **Краткие теоретические сведения**

| <u>Тригонометрические тождества</u>                            |  |
|----------------------------------------------------------------|--|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$                            |  |
| $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$        |  |
| $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ |  |
| $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$     |  |
| $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$    |  |

| <u>Формулы приведения</u> |                |                |                              |                              |
|---------------------------|----------------|----------------|------------------------------|------------------------------|
| $\beta$                   | $\sin \beta$   | $\cos \beta$   | $\operatorname{tg} \beta$    | $\operatorname{ctg} \beta$   |
| $\pi/2 + \alpha$          | $\cos \alpha$  | $-\sin \alpha$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$  |
| $\pi/2 - \alpha$          | $\cos \alpha$  | $\sin \alpha$  | $\operatorname{ctg} \alpha$  | $\operatorname{tg} \alpha$   |
| $\pi + \alpha$            | $-\sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$   | $\operatorname{ctg} \alpha$  |
| $\pi - \alpha$            | $\sin \alpha$  | $-\cos \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ |
| $2\pi + \alpha$           | $\sin \alpha$  | $\cos \alpha$  | $\operatorname{tg} \alpha$   | $\operatorname{ctg} \alpha$  |
| $2\pi - \alpha$           | $-\sin \alpha$ | $\cos \alpha$  | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ |
| $3\pi/2 + \alpha$         | $-\cos \alpha$ | $\sin \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$  |
| $3\pi/2 - \alpha$         | $-\cos \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$  | $\operatorname{tg} \alpha$   |
| $-\alpha$                 | $-\sin \alpha$ | $\cos \alpha$  | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ |

Задание:

1. Изучить теоретические положения
2. Выполнить задания (общее задание)

1. Преобразуйте выражения: а)  $\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$ ; б)  $\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$ ; в)  $\sin^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \beta$ .

2. Упростите: а)  $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$ ; б)  $\frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ .

3. Докажите тождество:  $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \cos^2 \alpha$ .

4. Вычислите

а)  $\sin 750^\circ + \cos 420^\circ$ ;

б)  $\operatorname{ctg} 405^\circ + 2 \sin 405^\circ \cdot \cos 135^\circ$ ;

в)  $\operatorname{tg} 765^\circ + \operatorname{tg} 780^\circ + \operatorname{tg} 795^\circ - \operatorname{tg} 405^\circ \cdot \operatorname{tg} 420^\circ - \operatorname{tg} 435^\circ$ .

Критерии оценки:

«3» - 4-5 верно выполненных примера

«4» - 6-7 верно выполненных примера

«5» - 8-9 верно выполненных примера

***Практическое занятие №28 «Применение тригонометрических формул при решении задач».***

**Цель работы:** закрепить умения и навыки применять тригонометрические формулы при решении задач.

**Краткие теоретические сведения**

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                |                              |                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------------|------------------------------|
| <u>Тригонометрические тождества</u><br>$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$<br>$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$<br>$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$<br>$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$<br>$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$                    | <u>Синус, косинус, тангенс и котангенс углов <math>\alpha</math> и <math>-\alpha</math></u><br>$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$<br>$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$<br>$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$<br>$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$                                                   |                |                              |                              |
| <u>Формулы сложения</u><br>$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$<br>$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \alpha$<br>$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ | <u>Синус, косинус, тангенс и котангенс двойного угла</u><br>$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$<br>$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$<br>$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$                                                                                |                |                              |                              |
| <u>Синус, косинус, тангенс и котангенс половинного угла</u><br>$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$<br>$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$<br>$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$<br>$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$             | <u>Формулы понижения степени</u><br>$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$<br>$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$<br>$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$<br>$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ |                |                              |                              |
| <u>Сумма и разность синусов и косинусов</u><br>$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$<br>$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$<br>$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$            | <u>Произведение синусов и косинусов</u><br>$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$<br>$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$<br>$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$                               |                |                              |                              |
| <u>Формулы приведения</u>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                |                              |                              |
| $\beta$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $\sin \beta$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $\cos \beta$   | $\operatorname{tg} \beta$    | $\operatorname{ctg} \beta$   |
| $\pi/2 + \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | $\cos \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | $-\sin \alpha$ | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$  |
| $\pi/2 - \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | $\cos \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | $\sin \alpha$  | $\operatorname{ctg} \alpha$  | $\operatorname{tg} \alpha$   |
| $\pi + \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $-\sin \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $-\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$   | $\operatorname{ctg} \alpha$  |
| $\pi - \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $\sin \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | $-\cos \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ |
| $2\pi + \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $\sin \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | $\cos \alpha$  | $\operatorname{tg} \alpha$   | $\operatorname{ctg} \alpha$  |
| $2\pi - \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $-\sin \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $\cos \alpha$  | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ |
| $3\pi/2 + \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $-\cos \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $\sin \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$  |
| $3\pi/2 - \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $-\cos \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $-\sin \alpha$ | $\operatorname{ctg} \alpha$  | $\operatorname{tg} \alpha$   |
| $-\alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | $-\sin \alpha$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $\cos \alpha$  | $-\operatorname{tg} \alpha$  | $-\operatorname{ctg} \alpha$ |

### Задание:

- Изучить теоретические положения
- Выполнить задания (по вариантам)

|    | Вариант1                                                                                                                                                        | Вариант2                                                                                                                                                        |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | Угол $541^\circ$ находится в<br>а) I; б) II; в) III; г) IV четверти                                                                                             | Угол $498^\circ$ находится в<br>а) I; б) II; в) III; г) IV четверти                                                                                             |
| 2  | Вычислите $\operatorname{ctg}(-600^\circ)$ :<br>а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; б) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; в) $\sqrt{3}$ ; г) не существует.                          | 2. Вычислите $\operatorname{tg}(-570^\circ)$ :<br>а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; б) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; в) $\sqrt{3}$ ; г) не существует.                        |
| 3  | Вычислите $\sin 750^\circ$ :<br>а) $\frac{1}{2}$ ; б) $-\frac{1}{2}$ ; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                                      | Вычислите $\cos 780^\circ$ :<br>а) $\frac{1}{2}$ ; б) $-\frac{1}{2}$ ; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                                      |
| 4  | Определить знак выражения<br>$\cos(-1) \cdot \sin(-2)$ :<br>а) $>0$ ; б) $<0$ ; в) $=0$ ; г) невозможно определить.                                             | Определить знак выражения<br>$\cos(-3) \cdot \sin 1$ :<br>а) $>0$ ; б) $<0$ ; в) $=0$ ; г) невозможно определить.                                               |
| 5  | Упростите выражение<br>$\cos 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 90^\circ$ ;<br>а) 0,5; б) 0; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; г) -0,5.         | Упростите выражение<br>$\cos 0^\circ - \sin 45^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ$ ;<br>а) 0,5; б) 0; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .     |
| 6  | Упростите выражение $\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha$ и найдите его значение, если $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .<br>а) $\frac{1}{4}$ ; б) $\frac{1}{2}$ ; в) 1; г) 0. | Упростите выражение $\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha$ и найдите его значение, если $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .<br>а) $\frac{1}{4}$ ; б) $\frac{3}{4}$ ; в) 1; г) 0. |

|   |                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                              |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7 | Найдите $\sin \alpha$ , если $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ , $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$<br>а) $\frac{4}{5}$ ; б) $\frac{3}{5}$ ; в) $-\frac{3}{5}$ ; г) $-\frac{4}{5}$ ; | Найдите $\cos \alpha$ , если $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ , $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$<br>а) $\frac{4}{5}$ ; б) $\frac{3}{5}$ ; в) $-\frac{3}{5}$ ; г) $-\frac{4}{5}$ ; |
| 8 | Упростите выражение<br>$\sin(2x + 4\pi) - 2 \sin(x+\pi) \cdot \cos(x-\pi)$ .<br>а) $2\sin 2x$ ; б) $\sin 2x$ в) $-2\sin^2 x$ ; г) 0.                                     | Упростите выражение<br>$\cos(2x + 6\pi) - \sin(\pi-x) \cdot \sin(x+\pi)$ .<br>а) $2\cos 2x$ ; б) $\sin 2x$ в) $\cos^2 x$ ; г) 0.                                             |

Критерии оценки:

«3» - 4-5 верно выполненных примера

«4» - 6-7 верно выполненных примера

«5» - 8 верно выполненных примера

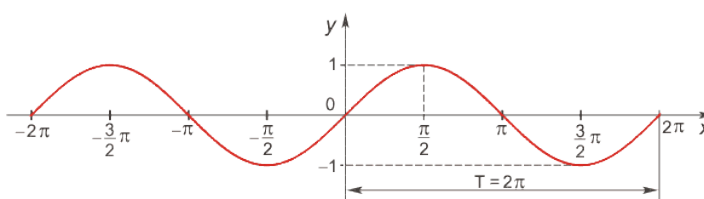
### ***Практическое занятие №29 «Исследование и построение графиков тригонометрических функций».***

**Цель работы:** закрепить умения и навыки исследовать и строить графики функции  $y = \cos x$  и  $y = \sin x$

#### **Краткие теоретические сведения**

##### **Функция синус**

$$y = \sin(x)$$



Область определения функции — множество  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел.  
Множество значений функции — отрезок  $[-1; 1]$ , т.е. синус функция — ограниченная.

Функция нечетная:  $\sin(-x) = -\sin x$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

График функции симметричен относительно начала координат.

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом  $2\pi$ :

$$\sin(x + 2\pi \cdot k) = \sin x, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

$\sin x = 0$  при  $x = \pi \cdot k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$\sin x > 0$  (положительная) для всех  $x \in (2\pi \cdot k, \pi + 2\pi \cdot k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$\sin x < 0$  (отрицательная) для всех  $x \in (\pi + 2\pi \cdot k, 2\pi + 2\pi \cdot k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Функция возрастает от  $-1$  до  $1$  на промежутках:

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Функция убывает от  $-1$  до  $1$  на промежутках:

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

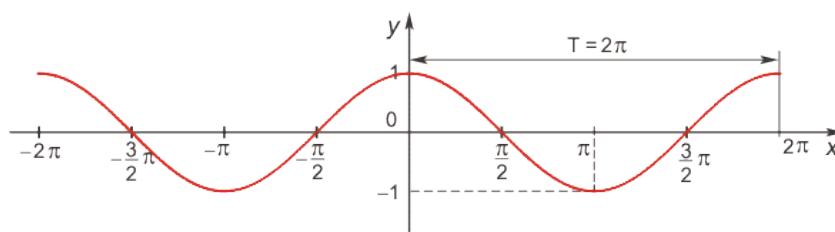
Наибольшее значение функции  $\sin x = 1$  в точках:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Наименьшее значение функции  $\sin x = -1$  в точках:  $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

### Функция косинус

$$y = \cos(x)$$



Область определения функции — множество  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел.  
Множество значений функции — отрезок  $[-1; 1]$ , т.е. косинус функция — ограниченная.

Функция четная:  $\cos(-x) = \cos x$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

График функции симметричен относительно оси  $OY$ .

Функция периодическая с наименьшим положительным периодом  $2\pi$ :

$$\cos(x + 2\pi \cdot k) = \cos x, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

$\cos x = 0$  при

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\cos x > 0$  для всех

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\cos x < 0$  для всех

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Функция возрастает от  $-1$  до  $1$  на промежутках:

$$[-\pi + 2\pi k, 2\pi k], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Функция убывает от  $-1$  до  $1$  на промежутках:

$$[2\pi k, \pi + 2\pi k], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Наибольшее значение функции  $\sin x = 1$  в точках:

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Наименьшее значение функции  $\sin x = -1$  в точках:

$$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

#### Задание:

1. Изучить теоретические положения
2. Решить задачи (по вариантам)

#### **Вариант 1.**

Постройте графики функций и опишите их свойства

- 1)  $y = 2\cos x + 1$ ;    2)  $y = \sin x + 1$ ;    3)  $y = \sin 2x - 1$ ;    4)  $y = 1 - 2\cos \frac{x}{2}$

#### **Вариант 2.**

Постройте графики функций и опишите их свойства

1)  $y = \cos 2x - 2$ ;      2)  $y = \sin x - 2$ ;      3)  $y = 2\sin x + 3$ ;      4)  $y = 1 + \frac{1}{2}\cos 3x$ .

Критерии оценки:

«3» - 2 верно выполненных примера

«4» - 3 верно выполненных примера

«5» - 4 верно выполненных примера

### **Практическое занятие №30 «Решение простейших тригонометрических уравнений».**

**Цель работы:** закрепить умения и навыки решать простейшие тригонометрические уравнения.

#### **Краткие теоретические сведения**

Тригонометрические уравнения – уравнения в котором переменная содержится под знаком тригонометрической функции.

Решение простейших тригонометрических уравнений:

1) Если  $|a| \leq 1$ , то уравнение  $\cos(x) = a$  имеет решение

$$x = \pm \arccos(a) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2) Если  $|a| \leq 1$ , то уравнение  $\sin(x) = a$  имеет решение

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

3) Если  $|a| > 1$ , то уравнение  $\sin(x) = a$  и  $\cos(x) = a$  не имеют решений

4) Уравнение  $\operatorname{tg}(x) = a$  имеет решение:  $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

5) Уравнение  $\operatorname{ctg}(x) = a$  имеет решение:  $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ,

для всех формул  $n$  - целое число

Примеры:

1)  $\cos x = 1$ ; Ответ:  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2)  $2 \cos x = 1$ ;  $\cos x = \frac{1}{2}$ ;  $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

3)  $\sin 2x = 0$ ;  $2x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ,  $x = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$  Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$

4)  $\operatorname{tg} \frac{x}{5} = \sqrt{3}$ ;  $\frac{x}{5} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$ ;  $\frac{x}{5} = \frac{\pi}{3} + \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$ ,  $x = \frac{5\pi}{3} + 5\pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $x = \frac{5\pi}{3} + 5\pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$

Задание:

1. Изучить теоретические положения, примеры решения задач
2. Решить задачи (по вариантам)

| Вариант 1.                                 | Вариант 2.                                |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Решите уравнение                           | Решите уравнение                          |
| $\cos 2x = 0$                              | $\cos 3x = 0$                             |
| $\sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ | $\sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ |

|                                                    |                                                    |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $\operatorname{tg} 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$        | $\operatorname{tg} 5x = \sqrt{3}$                  |
| $\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ | $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ |
| $\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$                     | $\cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$                     |
| $\operatorname{tg}(2x + \pi) = \sqrt{3}$ ;         | $\operatorname{tg}(2x + \pi) = 1$                  |

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных примера

«4» - 5 верно выполненных примера

«5» - 6 верно выполненных примера

### ***Практическое занятие №31 «Решение тригонометрических уравнений различных типов».***

**Цель работы:** закрепить умения и навыки решать тригонометрические уравнения различными способами.

#### **Краткие теоретические сведения**

Тригонометрические уравнения – уравнения в котором переменная содержится под знаком тригонометрической функции.

1. Решение простейших тригонометрических уравнений:

1) Если  $|a| \leq 1$ , то уравнение  $\cos(x) = a$  имеет решение

$$x = \pm \arccos(a) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2) Если  $|a| \leq 1$ , то уравнение  $\sin(x) = a$  имеет решение

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

3) Если  $|a| > 1$ , то уравнение  $\sin(x) = a$  и  $\cos(x) = a$  не имеют решений

4) Уравнение  $\operatorname{tg}(x) = a$  имеет решение:  $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

5) Уравнение  $\operatorname{ctg}(x) = a$  имеет решение:  $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ,

для всех формул  $n$ - целое число

Примеры:

1)  $\cos x = 1$ ; Ответ:  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

2)  $2 \cos x = 1$ ;  $\cos x = \frac{1}{2}$   $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ . Ответ:  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

3)  $\sin 2x = 0$ ;  $2x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ,  $x = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$  Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$

4)  $\operatorname{tg} \frac{x}{5} = \sqrt{3}$ ,  $\frac{x}{5} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$ ;  $\frac{x}{5} = \frac{\pi}{3} + \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$ ,  $x = \frac{5\pi}{3} + 5\pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ:  $x = \frac{5\pi}{3} + 5\pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$

2. Метод введения новой переменной.

Пример.  $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

Решение:  $t = \cos x$ ,  $2t^2 - t - 1 = 0$ ,  $D = 9$

1)  $t_1 = 1$

2)  $t_2 = \frac{1}{2}$

$\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$        $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Алгоритм решения уравнений методом введения новой переменной.

1. Привести уравнение к алгебраическому виду относительно одной из тригонометрических функций.

2. Обозначить полученную функцию переменной  $t$ .

3. Записать и решить полученное алгебраическое уравнение.

4. Сделать обратную замену.

5. Решить простейшее тригонометрическое уравнение.

3. Приведение уравнения к виду  $\operatorname{tg} x = a$ . Однородные уравнения.

Пример.

$$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4 = 0.$$

Решение.

$$1) 5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0;$$

$$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0;$$

$$\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 0 / \cos^2 x \neq 0.$$

$$2) \operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 4 = 0.$$

3) Пусть  $\operatorname{tg} x = t$ , тогда

$$t^2 + 3t - 4 = 0;$$

$$t = 1 \text{ или } t = -4, \text{ значит}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ или } \operatorname{tg} x = -4.$$

Из первого уравнения  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; из второго уравнения  $x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Алгоритм решения уравнений методом приведения к виду  $\operatorname{tg} x = a$

1. Привести данное уравнение к виду

а)  $a \sin x + b \cos x = 0$  (однородное уравнение первой степени)

или к виду

б)  $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$  (однородное уравнение второй степени).

2. Разделить обе части уравнения на

а)  $\cos x \neq 0$ ;

б)  $\cos^2 x \neq 0$ ;

и получить уравнение относительно  $\operatorname{tg} x$ :

а)  $a \operatorname{tg} x + b = 0$ ;

б)  $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$ .

3. Решить уравнение известными способами.

4. Разложение на множители.

Пример.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

Решение.

$$1) (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0;$$

$$2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 0.$$

$$2) \sin 2x \cdot (2\cos x + 1) = 0;$$

$$\sin 2x = 0 \text{ или } 2\cos x + 1 = 0;$$

Из первого уравнения  $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; из второго уравнения  $\cos x = \frac{-1}{2}$ .

Имеем  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ ; из второго уравнения  $x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

В итоге  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (по вариантам)

| Вариант 1.                       | Вариант 2.                         |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $2\sin x + 1 = 0$             | 1) $2\cos x - 1 = 0$               |
| 2) $4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$ | 2) $4\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0$   |
| 3) $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$ | 3) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$   |
| 4) $\sin 2x + \cos 2x = 0$       | 4) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0$ |
| 5) $1 - 2\sin 2x = 6\cos^2 x$    | 5) $1 + 2\sin 2x + 2\cos^2 x = 0$  |

Критерии оценки:

«3» - 3 верно выполненных примера

«4» - 4 верно выполненных примера

«5» - 5 верно выполненных примера

**Практическое занятие №32 «Производная в профессиональной деятельности».**

**Цель работы:** привить интерес к математике через практико-ориентированные задачи.

**Краткие теоретические сведения**

| Связь производной с физическими величинами | Описание величин                             | Физическая формула |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------|
| $v = S'(t)$                                | $v$ – скорость<br>$S$ – перемещение          | $v = \frac{S}{t}$  |
| $a = v'(t)$                                | $a$ – ускорение<br>$v$ – скорость            | $a = \frac{v}{t}$  |
| $I = q'(t)$                                | $I$ – сила тока<br>$q$ – электрический заряд | $I = \frac{q}{t}$  |

|                |                                                                        |                      |
|----------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| $\rho = m'(l)$ | $\rho$<br>— линейная плотность<br>$m$ — масса тела<br>$l$ — длина тела | $\rho = \frac{m}{l}$ |
| $\rho = m'(V)$ | $\rho$<br>— объемная плотность<br>$m$ — масса тела<br>$V$ — объем      | $\rho = \frac{m}{V}$ |

Пример 1. Найти кинетическую энергию тела, которое движется прямолинейно по закону  $S = 1 - t + t^2$  ( $S$  — измеряется в метрах, а  $t$  — в секундах), через 10 с. после начала движения. Масса тела составляет 5 кг. Решение

Тело движется прямолинейно по закону  $S = 1 - t + t^2$ .

Скорость  $v$  — это первая производная от пути  $S(t)$ . Определите скорость движения тела.

Скорость движения тела:  $v = 2t - 1$ .

По условию задачи нужно определить кинетическую энергию тела через 10 с. после начала движения. По какой формуле рассчитывается кинетическая энергия?

Кинетическая энергия рассчитывается по формуле:  $E = \frac{mv^2}{2}$ . Подставим в данную формулу необходимые величины  $t = 10$  с,  $v(t) = 19$  м/с:  $E = \frac{5 \cdot (19)^2}{2} = 902,5$  Дж.

Ответ: 902,5 Дж.

Пример 2. В какой момент времени скорость точки, которая движется прямолинейно по закону  $x(t) = 5t^2 + 3t - 12$ , ( $x(t)$  — перемещение в сантиметрах,  $t$  — время в секундах), будет равна 33 см/с.?

Решение

Тело движется прямолинейно по закону  $x(t) = 5t^2 + 3t - 12$ .

Скорость  $v$  — это первая производная от перемещения  $x(t)$ . Поэтому скорость движения тела:  $v = 10t + 3$ .

Определить время  $t$ , при котором скорость точки равна 33 см/с.

$33 = 10t + 3 \Rightarrow t = 3$  с. Ответ:  $t = 3$  с.

Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (общее задание)

1. Точка движется по закону  $s(t) = 2t^3 - 3t$ . Чему равна скорость тела в момент времени  $t_0 = 1$ с.

2. Точка движется прямолинейно по закону  $S(t) = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 5t + 1$ .

В какие моменты времени ее скорость будет равна нулю?

3. Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется по формуле  $V(t) = 15t^2 + 2t$ .

Чему равно ускорение тела в момент  $t_0 = 1$ с?

4. Вы движетесь со скоростью 70 км/ч по закону  $s(t)=15t^2-t$  и доехав до г. Тосно вдруг случается ЧП, вы прокололи колесо и провозились с его заменой 45 мин. Сколько времени вы потратили на движение с учетом времени замены колеса?

5. Поезд, двигаясь равнозамедленно с ускорением  $0,25$  м/с<sup>2</sup>, проходит  $1250$  м и останавливается. Определите скорость поезда в момент начала торможения.

Критерии оценки:

«3» - 3 верно выполненных заданий

«4» - 4 верно выполненных заданий

«5» - 5 верно выполненных заданий

### **Практическое занятие №33 «Формулы и правила дифференцирования».**

**Цель работы:** закрепить умения и навыки применять формулы и правила дифференцирования при решении задач

#### **Краткие теоретические сведения**

| Правила дифференцирования                           |  | Таблица производных |                       |
|-----------------------------------------------------|--|---------------------|-----------------------|
|                                                     |  | f(x) (функция)      | F'(x) (производная)   |
| $(u + v)' = u' + v'$                                |  | C (константа)       | 0                     |
| $(u - v)' = u' - v'$                                |  | x                   | 1                     |
| $(u \cdot v)' = u'v + v'u$                          |  | $x^2$               | 2x                    |
| $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ |  | $x^n$               | $n \cdot x^{n-1}$     |
| $(c \cdot f)' = c \cdot f'$                         |  | $\sqrt{x}$          | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
|                                                     |  | $\frac{1}{x}$       | $-\frac{1}{x^2}$      |

**Пример 1.** Вычислить производную функции  $y = 5x^2 + 3x + 4$

**Решение:**

$$y' = (5x^2 + 3x + 4)' =$$

[Используем первое и второе правило дифференцирования  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ]

$$= (5x^2)' + (3x)' + 4' =$$

[ Для первого и второго слагаемого следуем применить пятое правило дифференцирования  $(const \cdot f(x))' = const \cdot f'(x)$  ]

[ для третьего слагаемого используем правило  $const' = 0$ , для первого и второго - табличную производную  $(x^n)' = nx^{n-1}$  ]

$$= 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 3 \cdot 1 \cdot x^{1-0} + 0 = 10 \cdot x + 3$$

### Задание:

3. Изучить теоретические положения и пример.
4. Выполнить задания (по вариантам)

### **Вариант 1.**

1. Найдите производную функции:  $f(x) = 1/6x^3 - 0,5x^2 - 3x + 2$ , вычислите ее значение при  $x = -1$   
 a) -2,5;    b) 1,5;    c) -1,5;    d) 2,5.
2. Найдите  $f'(x)$ , если  $f(x) = x\sqrt{x}$   
 a)  $3/2\sqrt{x}$ ;    b)  $2\sqrt{x}/3$ ;    c)  $2/3\sqrt{x}$ ;    d)  $1,5\sqrt{x}$ .
3. Найдите производную функции:  $f(x) = (3+2x)/(x-5)$   
 a)  $-13/(x-5)^2$ ;    b)  $8/(x-5)^2$ ;    c)  $-5/(x-5)^2$ ;    d)  $(1-x)/(x-5)^2$ .
4. Найдите значение  $f'(0,5)$ , если  $f(x) = 3/(5-4x)$   
 a) 3;    b) 4/9;    c) 8/3;    d) 2.
5.  $f(x) = (2x-3)\sqrt{x}$ . Найдите  $f''(1) + f(1)$ .  
 a) 15;    b) 7,5;    c) 2,75;    d) 0,5.
6. Решить уравнение  $y' = 0$   
 $y = x^3 + 4x^2 - 3x$ .

### **Вариант 2.**

1. Найдите производную функции:  $f(x) = -1/6x^3 + 1,5x^2 + 5x - 3$ , вычислите ее значение при  $x = -2$   
 a) -3;    b) -5;    c) 2;    d) 3.
2. Найдите  $f'(x)$ , если  $f(x) = -x\sqrt{x}$   
 a)  $-2/3\sqrt{x}$ ;    b)  $-2\sqrt{x}/3$ ;    c)  $-1,5\sqrt{x}$ ;    d)  $-3/2\sqrt{x}$ .
3. Найдите производную функции:  $f(x) = (4-3x)/(x+2)$

b)  $2/(x+2)^2$ ;      b)  $-10/(x+2)^2$ ;      c)  $10/(x+2)^2$ ;      d)  $-2/(x+2)^2$ .

4. Найдите значение  $f'(-0,5)$ , если  $f(x)=4/(3+2x)$

b)  $-0,5$ ;      b)  $4$ ;      c)  $-2$ ;      d)  $0,5$ .

5.  $f(x)=(3x+4)\sqrt{x}$ . Найдите  $f'(1) - f(1)$ .

b)  $-7,5$ ;      b)  $-25,5$ ;      c)  $15,5$ ;      d)  $-0,5$ .

6. Решить уравнение  $y' = 0$

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7.$$

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных примера

«4» - 5 верно выполненных примера

«5» - 6 верно выполненных примера

### ***Практическое занятие №34 «Производные элементарных функций».***

**Цель работы:** закрепить умения и навыки применять формулы для вычисления производных элементарных функций при решении задач.

### **Краткие теоретические сведения**

Таблица производных

| $f(x)$ (функция)       | $f'(x)$ (производная) |
|------------------------|-----------------------|
| $C$ (константа)        | $0$                   |
| $x$                    | $1$                   |
| $x^2$                  | $2x$                  |
| $x^n$                  | $n \cdot x^{n-1}$     |
| $\sqrt{x}$             | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\frac{1}{x}$          | $-\frac{1}{x^2}$      |
| $\sin x$               | $\cos x$              |
| $\cos x$               | $-\sin x$             |
| $\operatorname{tg} x$  | $\frac{1}{\cos^2 x}$  |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $e^x$                  | $e^x$                 |
| $a^x$                  | $a^x \cdot \ln a$     |
| $\ln x$                | $\frac{1}{x}$         |
| $\log_a x$             | $\frac{1}{x \ln a}$   |

Пример 1. Вычислить производную функции

$$y = x^2 \sin(x)$$

Решение:

$$y' = (x^2 \sin(x))' = x^2 (\sin(x))' + (x^2)' \sin(x) =$$

[Применим табличные производные  $(x^n)' = nx^{n-1}$  и  $\sin'(x) = \cos(x)$ ]

$$= x^2 \cos(x) + 2x \sin(x)$$

Пример 2. Вычислить производную функции  $y = \frac{e^{x+14}}{x^2 + 2x}$

Решение:

$$y' = \left( \frac{e^{x+14}}{x^2 + 2x} \right)' = \frac{(e^{x+14})'(x^2 + 2x) - (e^{x+14})(x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2} =$$

[Вспомним свойства степеней  $e^{x+14} = e^x e^{14}$  и вынесем константу за знак дифференциала.]

$$\begin{aligned} &= \frac{(e^x e^{14})'(x^2 + 2x) - e^{x+14}(2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{e^{14}(e^x)'(x^2 + 2x) - e^{x+14}(2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2} = \\ &= \frac{e^{14}e^x(x^2 + 2x) - e^{x+14}(2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{e^{x+14}(x^2 + 2x) - e^{x+14}(2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2} = \\ &= \frac{e^{x+14}(x^2 + 2x - 2x - 2)}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{e^{x+14}(x^2 - 2)}{(x^2 + 2x)^2} \end{aligned}$$

Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры
2. Выполнить задания (по вариантам)

### Вариант 1.

В заданиях 1-4 выбрать правильный ответ.

1. Найти производную функции  $y = 3\cos x + x^2$ .

1)  $y' = 3\sin x - 2x$     3)  $y' = 2x - 3\sin x$

2)  $y' = 4x - \sin x$     4)  $y' = x^2 + 2\cos x$

2. Найти производную функции  $y = 9 - 9x^8 - \frac{6}{5}x^5$ .

1)  $y' = 9x - x^9 - \frac{1}{5}x^6$     3)  $y' = -72x^7 - 6x^4$

2)  $y' = 9x - 72x^7 - 5x^4$     4)  $y' = -17x^7 - 6x^4$

3. Укажите производную функции  $f(x) = \frac{x+3}{\sin x}$ .

1)  $f'(x) = \frac{\sin x - (x+3)\cos x}{\sin^2 x}$     3)  $f'(x) = \sin x - (x+3)\cos x$

2)  $f'(x) = \frac{\sin x - (x+3)\cos x}{\sin^2 x}$     4)  $f'(x) = \sin x + (x+3)\cos x$

4. Найдите значение производной функции  $y = x^2 e^x$  в точке  $x_0 = 1$ .

1) 1,    2) 0,    3)  $2e$ ,    4)  $3e$

5. Найти значения  $x$ , при которых значение производной функции  $f(x) = \frac{1-x}{x^2+8}$  равно нулю; отрицательно.

**Вариант 2.**

1. Найти производную функции  $y = x^6 - 4\sin x$ .

1)  $y' = 6x^5 + 4\cos x$

3)  $y' = \frac{x^7}{7} + 4\cos x$

2)  $y' = 6x^5 - 4\cos x$

4)  $y' = x^5 - 4\cos x$

2. Найти производную функции  $y = -\frac{7}{6}x^6 + 5x^4 - 14$ .

1)  $y' = -7x^7 + x^5 - 14x$

3)  $y' = -7x^5 + 20x^3$

2)  $y' = -\frac{1}{6}x^7 + x^5 - 14x$

4)  $y' = -7x^5 + 9x^3$

3. Найдите значение производной функции  $f(x) = \frac{2-x}{x}$  в точке  $x_0 = 0,5$ .  
1) -9,      2) -8,      3) 8,      4) -0,5

4. Вычислите  $f'(\frac{\pi}{4})$ , если  $f(x) = e^x \sin x$ .

1) 0,    2)  $2e^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}$ ,    3) 1,    4)  $\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}}$

5. Найти значения  $x$ , при которых значение производной функции  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$  равно нулю; положительно.

Критерии оценки:

«3» - 3 верно выполненных примера

«4» - 4 верно выполненных примера

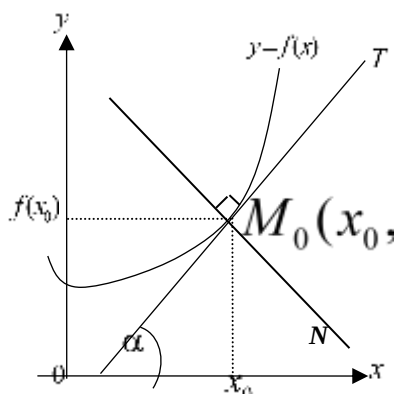
«5» - 5 верно выполненных примера

**Практическое занятие №35 «Решение задач на физический и геометрический смысл производной».**

**Цель работы:** закрепить понятие о геометрическом и физическом смысле производной

**Краткие теоретические сведения**

## Геометрический смысл производной.



Если кривая задана уравнением  $y = f(x)$ , то  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$  — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ( $K = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ ).

Уравнение касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  (прямая  $M_0T$ ) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

**Пример.** Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции  $y = x^3 - x$  в точке  $x_0 = 0$ .

**Решение.** Из геометрического смысла производной получаем, что производная функции  $y = f(x)$ , вычисленная при заданном значении  $x_0$ , равна тангенсу угла, образованного положительным направлением оси  $Ox$  и положительным направлением касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой  $x_0$ , то есть

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Найдем производную от заданной функции:

$$f'(x) = (x^3 - x)' = 3x^2 - 1$$

в точке  $x_0 = 0$  имеем:

$$f'(0) = -1$$

Тогда окончательно получим, что

$$\operatorname{tg} \alpha = -1 \quad \text{Ответ. } \operatorname{tg} \alpha = -1$$

## Физический смысл производной.

Пусть  $S=S(t)$  — закон прямолинейного движения.

Тогда  $v(t_0) = s'(t_0)$  выражает мгновенную скорость движения в момент времени  $t_0$ .

**Пример.** Точка движется по закону  $x(t) = 2t^3 - 3t$ . Чему равна скорость в момент времени  $t = 1$ ?

**Решение.** Найдем скорость точки как первую производную от перемещения:

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t) = (2t^3 - 3t)' = (2t^3)' - (3t)' = \\ &= 2 \cdot (t^3)' - 3 \cdot (t)' = 2 \cdot 3t^2 - 3 \cdot 1 = 6t^2 - 3 \end{aligned}$$

В момент времени  $t = 1$  скорость равна

$$v(1) = 6 \cdot 1^2 - 3 = 6 - 3 = 3$$

Ответ.  $v(1) = 3$

## Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (по вариантам)

### Вариант 1.

1. Напишите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x^2$  в точке  $x_0 = 3$ .
2. Составьте уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ , если  $f(x) = x^2(x + 2)$ ,  $x_0 = 1$
3. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = 2x + e^x$  в его точке с абсциссой  $x_0 = 0$ .
4. Найти мгновенную скорость движения точки, если закон ее движения  $S(t)$  задан формулой:  $S(t) = 5t - 3$
5. Определить скорость тела, движущегося по закону  $S(t) = t^2 + 2t$  в момент времени  $t = 8$

### Вариант 2.

1. Составьте уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x^2 - 4$  в точке  $x_0 = -2$ .
2. Составьте уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ , если  $f(x) = x^2(x - 3)$ ,  $x_0 = -1$
3. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = x + 2e^x$  в его точке с абсциссой  $x_0 = 0$ .
4. Найти мгновенную скорость движения точки, если закон ее движения  $S(t)$  задан формулой:  $S(t) = 1 - 4t$
5. Определить скорость тела, движущегося по закону  $S(t) = 2t^2 - 3$  в момент времени  $t = 11$

Критерии оценки:

- «3» - 3 верно выполненных примера
- «4» - 4 верно выполненных примера
- «5» - 5 верно выполненных примера

**Практическое занятие №36 «Возрастание и убывание функции. Точки экстремума».**

**Цель работы:** закрепить умения и навыки исследования функции с помощью производной.

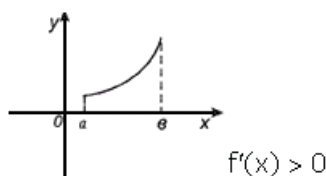
#### Краткие теоретические сведения

Рассмотрим дифференцируемую на некотором интервале

функцию  $y = f(x)$ . Тогда:

– если производная  $f'(x) > 0$  в каждой точке интервала  $(a, b)$ , то

функция  $f(x)$  возрастает на данном интервале;



– если производная  $f'(x) < 0$  в каждой точке интервала  $(a, b)$ , то функция  $f(x)$  убывает на данном интервале.

## Экстремумы функции

Определение:

$x_0$  называется критической точкой функции  $f(x)$ , если

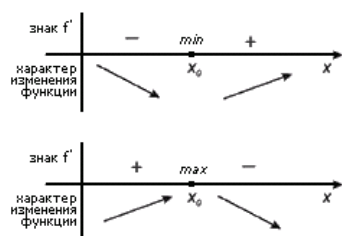
- 1)  $x_0$  – внутренняя точка области определения  $f(x)$  ;
- 2)  $f'(x_0)=0$  или  $f'(x_0)$  не существует.

Необходимое условие экстремума:

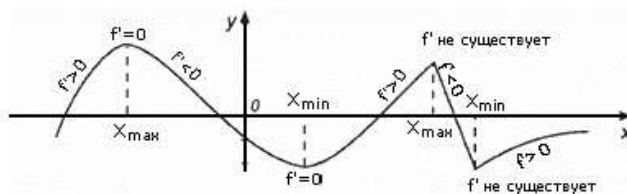
Если  $x_0$  – точка экстремума функции  $f(x)$ , то эта точка является критической точкой данной функции.

Достаточное условие экстремума:

Если при переходе через точку  $x_0$  производная функции меняет знак, то  $x_0$  – точка экстремума функции  $f(x)$ .



Примеры экстремумов:



Пример. Найти интервалы возрастания/убывания и экстремумы функции

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$$

Решение:

Для этого следует найти производную и решить уравнение  $f'(x) = 0$ :

$$f'(x) = \left( -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1 \right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 5 - 0 = -x^2 + 6x - 5$$

Получилось обычное квадратное уравнение:

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$D = 36 - 20 = 16 > 0$$

Положительный дискриминант доставляет две критические точки:

$$\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$$

$$x = \frac{-6 + 4}{-2} = 1$$

$$x = \frac{-6 - 4}{-2} = 5$$

Итак,  $x = 1, x = 5$  – критические точки

Далее на числовой прямой нужно отложить критические точки и определить знаки производной на интервалах.



I) Берём какую-нибудь точку интервала  $(-\infty; 1)$  и находим значение производной в данной точке. Удобнее всего выбрать  $x = 0$ :

$f'(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 5 = -5 < 0$ , значит, производная отрицательна на всём интервале  $(-\infty; 1)$ .

II) Выбираем точку  $x = 2$ , принадлежащую интервалу  $(1; 5)$ , и проводим аналогичное действие:

$f'(2) = -2^2 + 6 \cdot 2 - 5 = -4 + 12 - 5 = 3 > 0$ , следовательно,  $f'(x) > 0$  на всём интервале  $(1; 5)$ .

III) Вычислим значение производной в наиболее удобной точке  $x = 6$  последнего интервала:

$f'(6) = -6^2 + 6 \cdot 6 - 5 = -36 + 36 - 5 = -5 < 0$ , поэтому  $f'(x) < 0$  в любой точке интервала  $(5; +\infty)$ .

В результате получены следующие знаки производной:



На интервалах  $(-\infty; 1)$ ,  $(5; +\infty)$  производная отрицательна, значит, сама

функция  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x - 1$  на данных интервалах убывает. На среднем интервале  $f'(x) > 0$ , значит, функция возрастает на  $(1; 5)$ .

При переходе через точку  $x = 1$  производная меняет знак с «-» на «+», следовательно, в этой точке функция достигает минимума:

$$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 1 = -\frac{1}{3} + 3 - 5 - 1 = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$$

При переходе же через точку  $x = 5$  производная меняет знак с «+» на «-», и функция достигает максимума в данной точке:

$$f(5) = -\frac{1}{3} \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 - 1 = -\frac{125}{3} + 75 - 25 - 1 = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

Ответ: функции возрастает на интервале  $(1; 5)$  и убывает на

интервалах  $(-\infty; 1)$ ,  $(5; +\infty)$ . В точке  $x = 1$  функция достигает минимума:  $f(1) = -3\frac{1}{3}$ ,

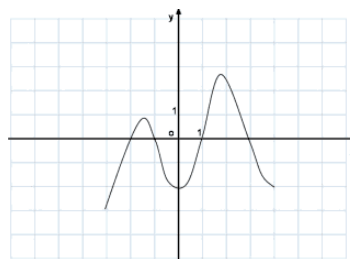
а в точке  $x = 5$  — максимума:  $f(5) = 7\frac{1}{3}$

#### Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (по вариантам)

#### **Вариант 1**

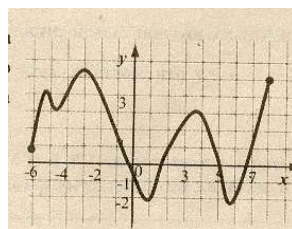
1. На рисунке изображён график производной функции  $y = f'(x)$ . Укажите число промежутков убывания и возрастания функции.



2. Определите промежутки возрастания и убывания функции:

а)  $f(x) = x^3 - 12x$ , б)  $f(x) = x^4 - 2x^2$

3. Укажите количество точек минимума и точек максимума функции.

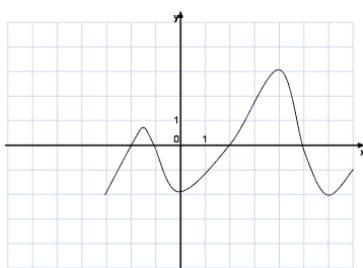


4. Найти экстремумы функции:

а)  $y=2x^4-x$  б)  $y=9x^2-9x^3$

### Вариант 2

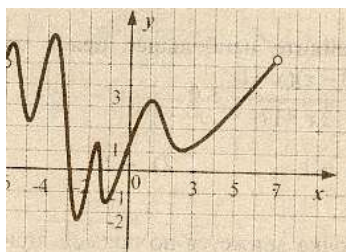
1. На рисунке изображён график производной функции  $y=f'(x)$ . Укажите число промежутков убывания и возрастания функции



2. Определите промежутки возрастания и убывания функции

а)  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ , б)  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

3. Укажите количество точек минимума и точек максимума функции.



4. Найти экстремумы функции:

а)  $y=x^3-3x$  б)  $y=2x^2-x^4$

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных примера

«4» - 5 верно выполненных примера

«5» - 6 верно выполненных примера

### **Практическое занятие №37 «Исследование функций и построение графиков».**

**Цель работы:** закрепить умения и навыки исследования с помощью производной для построения графика функции.

## Краткие теоретические сведения

Схема исследования функции.

Необходимо найти:

- 1) область ее определения;
- 2) производную;
- 3) стационарные точки;
- 4) промежутки возрастания и убывания;
- 5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Результаты исследования удобно записывать в виде таблицы. Затем, используя таблицу, строят график функции. Для более точного построения графика обычно находят точки его пересечения с осями координат и – при необходимости – еще несколько точек графика.

Пример.

Исследовать функцию  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$  и построить ее график.

Решение. Исследуем функцию по вышеприведенной схеме.

Область определения  $x \in R$  ( $x$  – любое действительное число);

Производная  $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$  не имеет точек, в которых она не существует, поэтому её область определения  $R$  (все действительные числа); нули  $f'(x)$  – это корни уравнения:

$$3x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Эти корни:  $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$ . Функция имеет

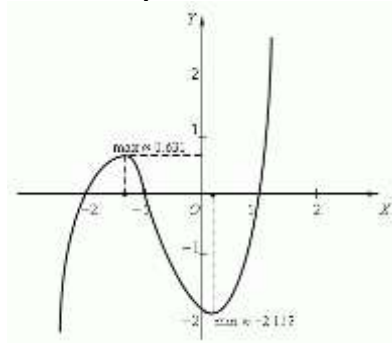
две критические точки и три интервала монотонности:

$(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{7}}{3})$ ,  $(\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{7}}{3})$  и  $(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}, +\infty)$ .

Полученные результаты сведены в таблицу:

| $x$     | $(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{7}}{3})$ | $\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}$ | $(\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{7}}{3})$ | $\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$ | $(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}, +\infty)$ |
|---------|--------------------------------------|---------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| $f'(x)$ | +                                    | 0                         | -                                                    | 0                         | +                                    |
| $f(x)$  | $\nearrow$                           | $\sim 0.631$              | $\searrow$                                           | $\sim -2.112$             | $\nearrow$                           |
|         |                                      | max                       |                                                      | min                       |                                      |

График функции пересекается с осью  $Y$  в точке  $(0, -2)$ , так как  $f(0) = -2$

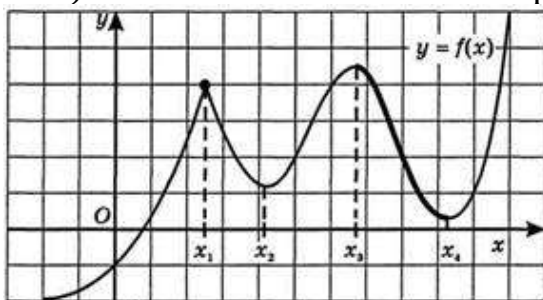


Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (по вариантам)

**Вариант 1.**

1. По графику функции  $y=f(x)$  ответьте на вопросы:
  - а) Сколько точек максимума имеет эта функция?
  - б) Назовите точки минимума функции.
  - в) Сколько промежутков возрастания у этой функции?
  - г) Назовите наименьший из промежутков убывания этой функции.

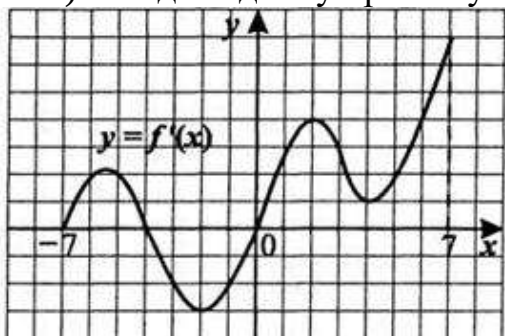


2. Исследуйте функцию и постройте её график:

а)  $y = 2x^2 - x^4$ , б)  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

**Вариант 2.**

1. По графику функции  $y=f'(x)$  ответьте на вопросы:
  - а) Сколько точек максимума имеет эта функция?
  - б) Назовите точки минимума функции.
  - в) Сколько промежутков возрастания у этой функции?
  - г) Найдите длину промежутка убывания этой функции.



2. Исследуйте функцию и постройте её график:

а)  $y = -4x^3 + 3x^2$ , б)  $y = 3x^5 - 5x^4$

**Критерии оценки:**

- «3» - 1 верно выполненное задание  
«4» - 2 верно выполненных заданий  
«5» - 3 верно выполненных заданий

**Практическое занятие №38 «Решение задач, связанных с применением правил действий с векторами».**

**Цель работы:** усвоить понятия «равные векторы», правила сложения и вычитания векторов

**Краткие теоретические сведения**

**Вектор** – направленный отрезок. Другими словами, вектором называется отрезок, для которого указано, какой из его концов является началом, а какой концом.

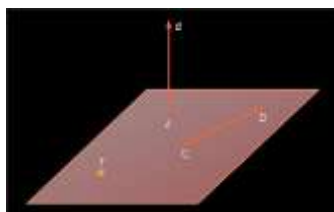


Рисунок 1

На рисунке 1 изображены ненулевые векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  и нулевой вектор  $\overrightarrow{0}$ . Нулевой вектор иногда обозначается символом  $\overrightarrow{TT}$ .

Длиной (модулем) ненулевого вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ . Она обозначается как  $|\overrightarrow{AB}|$ . Длина нулевого вектора равна нулю:  $|\overrightarrow{0}| = 0$ .

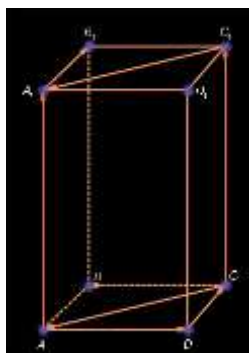


Рисунок 2

Два вектора называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны.

На рисунке 2

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}, \quad \text{так как} \quad \overrightarrow{AA_1} \uparrow \overrightarrow{CC_1} \quad \text{и} \quad |\overrightarrow{AA_1}| = |\overrightarrow{CC_1}|, \quad \overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{CB}, \quad \text{а} \quad \overrightarrow{AD} \updownarrow \overrightarrow{CB}.$$

$\vec{a}$        $\vec{b}$        $\vec{c}$ ,

Суммой двух векторов и называется новый вектор который

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

обозначается и получается следующим образом.

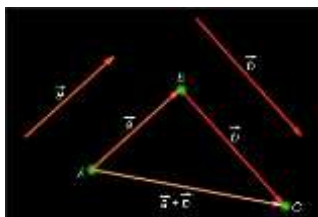


Рисунок 3.

Отложим от произвольной точки A вектор  $\overrightarrow{AB}$ , равный  $\vec{a}$ . Теперь от точки B отложим вектор  $\overrightarrow{BC}$ , равный  $\vec{b}$ . Вектор  $\overrightarrow{AC}$  и называется суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :  $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ . Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*.

Для сложения двух неколлинеарных векторов можно воспользоваться *правилом параллелограмма*, известным из курса планиметрии (рис. 4).

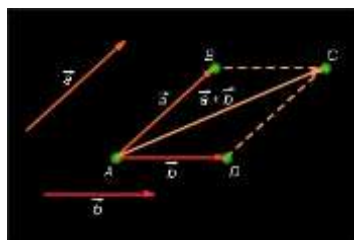
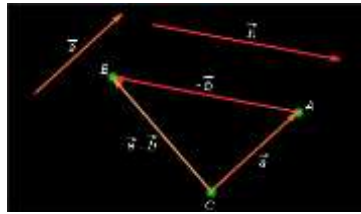


Рисунок 4

Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется такой вектор  $\vec{c}$ , сумма которого с вектором  $\vec{b}$  равна вектору  $\vec{a}$ . Обозначается разность векторов

так:  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ , где  $(-\vec{b})$  – вектор, противоположный вектору



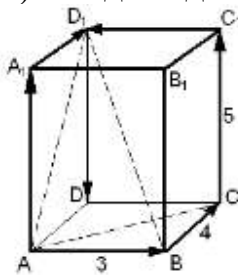
### Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (по вариантам)

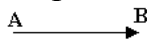
### **Вариант 1**

1. По чертежу:

- а) Назовите векторы, равные векторам  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CC_1}$ ;
- б) Найдите длины векторов  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AA_1}$ ,  $\vec{BD_1}$ .



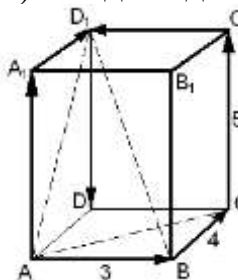
2. Пользуясь «правилом треугольника», постройте вектор, равный сумме векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ . Запишите результат в виде равенства.



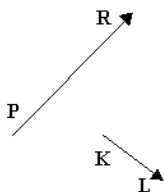
### **Вариант 2**

1. По чертежу:

- а) Назовите векторы, равные векторам  $\vec{BC}$ ,  $\vec{BB_1}$ ;
- б) Найдите длины векторов  $\vec{BC}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD_1}$ .



2. Пользуясь «правилом параллелограмма», постройте вектор, равный сумме векторов  $\vec{PR}$  и  $\vec{KL}$ . Запишите результат в виде равенства.



Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных примера

«4» - 5 верно выполненных примера

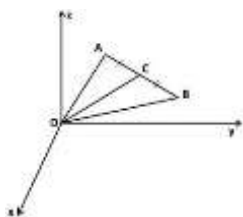
«5» - 6 верно выполненных примера

### ***Практическое занятие №39 «Простейшие задачи в координатах»***

**Цель работы:** закрепить умения и навыки использовать формулы для нахождения координат середины отрезка, длины вектора по ее координатам и расстояния между двумя точками при решении задач.

#### **Краткие теоретические сведения**

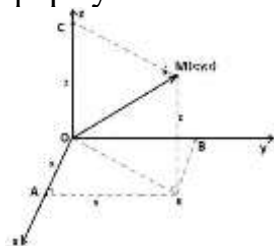
1) Задача на нахождение координат середины отрезка (рис. 1). Даны две точки:  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ,  $C$  – середина  $AB$ . Найти:  $C(x; y; z)$ .



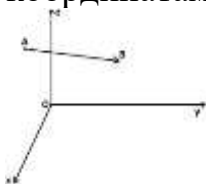
Найдем координаты точки  $C$ :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

2) Если у нас есть вектор  $\vec{a}\{x; y; z\}$ , то его модуль вычисляется по формуле:  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .



3) Задача на нахождение расстояния между точками, которые заданы координатами. Дано:  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ . Найти: длину отрезка  $AB$ .



$$AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пример.

Дано:  $M(-4;7;0)$ ,  $N(0;-1;2)$ ,  $C$  – середина  $MN$ . Найти: расстояние от начала координат до точки  $C$ .

Решение: Сначала найдем координаты точки  $C$ . Ее координаты равны

полусумме соответствующих координат.  $C\left(\frac{-4+0}{2}; \frac{7-1}{2}; \frac{0+2}{2}\right) = C(-2; 3; 1)$ .

Нужно найти расстояние от начала координат до точки  $C$ . Воспользуемся формулой нахождения длины вектора по его координатам:

$$OC = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$$

Ответ:  $\sqrt{14}$ .

Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (по вариантам)

### Вариант 1

1. Найти длину вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(-1;-1;0)$ ;  $B(1;1;2)$ .
  - a.  $4\sqrt{3}$
  - b. 2
  - c.  $3\sqrt{3}$
  - d. 6
  - e.  $2\sqrt{3}$
2.  $A(1;6;2)$ ,  $B(2;3;-1)$ . Найти координаты вектора  $\overrightarrow{m} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$ 
  - a.  $\{3; 9; 1\}$
  - b.  $\{2; -6; -6\}$
  - c.  $\{1; -3; -3\}$
  - d.  $\{2; 6; 6\}$
  - e.  $\{-2; 3; 3\}$
3. Точка  $M$  – середина отрезка  $AB$ . Найти координаты точки  $B$ , если  $A(14;-8;5)$ ,  $M(3;-2;-7)$ .
  - a.  $(8,5;-5;-1)$
  - b.  $(5,5;-3;6)$
  - c.  $(17;-10;-2)$
  - d.  $(-8;4;-19)$
  - e.  $(42;16;-35)$
4. При каких значениях  $k$  и  $m$  векторы  $\overrightarrow{A}\{-1; -1; m\}$  и  $\overrightarrow{B}\{k; 4; 5\}$  коллинеарны?
  - a.  $k=-\frac{5}{4}$ ,  $m=4$
  - b.  $k=4$ ,  $m=\frac{5}{4}$
  - c.  $k=-4$ ,  $m=-\frac{5}{4}$
  - d.  $k=4$ ,  $m=-\frac{5}{4}$
  - e.  $k=-4$ ,  $m=\frac{5}{4}$

### Вариант 2

1. Найти длину вектора  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(2;3;2)$ ;  $B(1;5;0)$ .
  - a. 3
  - b. 5
  - c. 2
  - d. 4
  - e. 7
2.  $A(5;1;0)$ ,  $B(-2;-3;1)$ . Найти координаты вектора  $\overrightarrow{m} = -3 \cdot \overrightarrow{AB}$ 
  - a.  $\{-7;-4;1\}$
  - b.  $\{21;12;-3\}$
  - c.  $\{-21;-12;3\}$
  - d.  $\{3;-2;1\}$

- е.  $\{-6;6;-3\}$
3. Точка М – середина отрезка АВ. Найти координаты точки А, если М  $(-6;2;0)$ , В  $(3;-2;4)$ .
- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| а. $(15;-6;4)$              | д. $(-18;-4;0)$             |
| б. $(-15;6;-4)$             | е. $(-9;4;-4)$              |
| с. $(-3;0;4)$               |                             |
| ф. $(-5\sqrt{3};5\sqrt{3})$ | г. $[-5\sqrt{3};5\sqrt{3}]$ |
4. При каких значениях  $k$  и  $m$  векторы  $A\{4;-4;m\}$  и  $B\{2;k;1\}$  коллинеарны?
- |                 |
|-----------------|
| а. $k=-4, m=-1$ |
| б. $k=-2, m=2$  |
| с. $k=-2, m=-2$ |
| д. $k=2, m=-2$  |
| е. $k=2, m=2$   |

Критерии оценки:

- «3» - 2 верно выполненных заданий  
«4» - 3 верно выполненных заданий  
«5» - 4 верно выполненных заданий

**Практическое занятие №40 «Координатно-векторный метод при решении задач».**

**Цель работы:** закрепить умения применять координатно-векторный метод при решении задач

**Краткие теоретические сведения**

Использование векторов позволяет находить углы между прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями. Для начала разберем наиболее удобные способы расположения системы координат относительно различных видов многогранников.

1. Куб.

При таком расположении системы координат (рис. 4) вершины куба будут

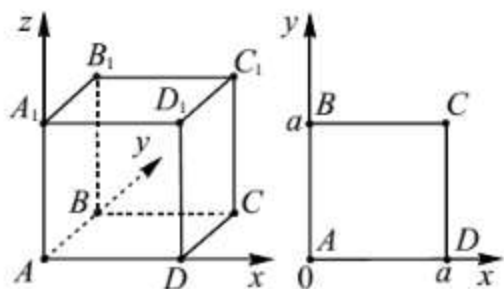


Рис.4

иметь следующие координаты:  $A(0;0;0)$ ,  $B(0;a;0)$ ,  $C(a;a;0)$ ,  $D(a;0;0)$ ,  $A_1(0;0;a)$ ,  $B_1(0;a;a)$ ,  $C_1(a;a;a)$ ,  $D_1(a;0;a)$ .

Такое же расположение системы координат удобно использовать для прямоугольного параллелепипеда. Еще один вариант расположения куба относительно системы координат связан с размещением начала координат в точке пересечения диагоналей основания.

2. Правильная шестиугольная призма.

Пусть в правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  сторона основания равна  $a$ , а боковое ребро равно  $b$ . Разместим начало координат в точке  $A$ , ось абсцисс направим вдоль ребра  $AF$ , ось  $Oy$  – через точку  $A$  перпендикулярно  $AF$ , ось  $Oz$  – вдоль бокового ребра  $AA_1$  (смотри рисунок

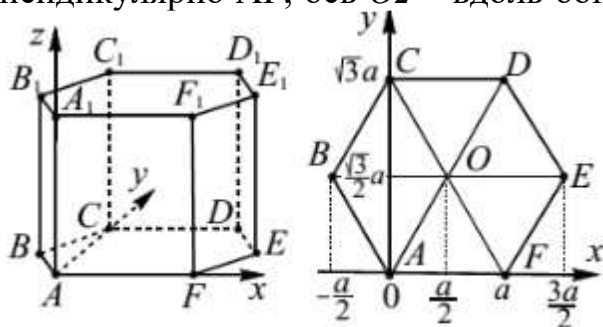


Рис. 7

7).

Тогда вершины призмы будут иметь координаты:  $A(0;0;0)$ ,  $B(-a/2;a\sqrt{3}/2;0)$ ,  $C(0; a\sqrt{3};0)$ ,  $D(a; a\sqrt{3};0)$ ,  $E(3a/2;a\sqrt{3}/2;0)$ ,  $F(a;0;0)$ ,  $A_1(0;0;b)$ ,  $B_1(-a/2;a\sqrt{3}/2;b)$ ,  $C_1(0; a\sqrt{3};b)$ ,  $D_1(a; a\sqrt{3};b)$ ,  $E_1(3a/2;a\sqrt{3}/2;b)$ ,  $F_1(a;0;b)$ .

### 3. Правильная четырехугольная пирамида.

Пусть в правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  сторона основания равна  $a$ , а высота равна  $h$ .

Разместим начало координат в точке  $A$ , ось абсцисс направим вдоль ребра  $AD$ , ось  $Oy$  – вдоль ребра  $AB$ , ось  $Oz$  – через точку  $A$  перпендикулярно плоскости  $ABC$ . Тогда вершины пирамиды имеют координаты:  $A(0;0;0)$ ,  $B(0;a;0)$ ,  $C(a;a;0)$ ,  $D(a;0;0)$ ,  $M(a/2;a/2;h)$ .

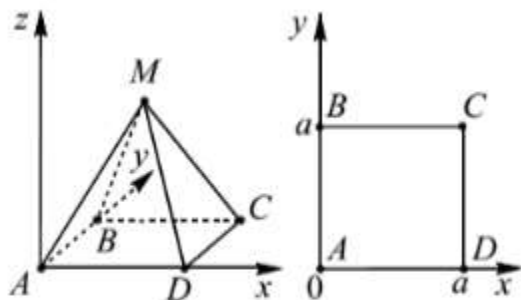
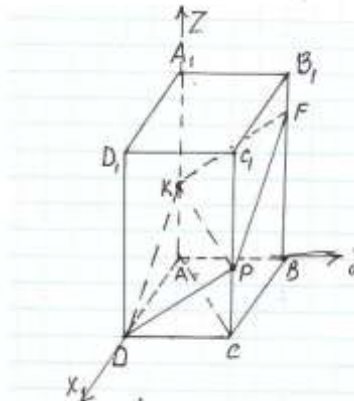


Рис.11

Пример.  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – правильная четырехугольная призма, на ребре  $CC_1$  отмечена точка  $P$  такая, что  $CP:PC_1 = 3:5$ . Плоскость  $\beta$  проходит через точки  $D$  и  $P$  и параллельна прямой  $AC$ . Эта плоскость пересекает ребро  $BB_1$  в точке  $F$ . Докажите, что сечение призмы плоскостью  $\beta$  является ромбом.



а) Т. к. противоположные грани параллелепипеда параллельны, то по свойству параллельных плоскостей сечение является параллелограммом. Для доказательства перпендикулярности диагоналей воспользуемся методом координат.

Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Тогда  $D(6;0;0)$ ,  $K(0;0;3a)$ ,  $P(6;6;3a)$ ,  $F(0;6;z)$ . Значение  $z$  вычислим из равенства векторов  $DK$  и  $PF$ .  $DK\{-6;0;3a\}$ ,  $PF\{-6;0;z-3a\}$ .  $Z=6a$ .

Вычислим скалярное произведение  $DF * KP$ .  $DF\{-6;6;6a\}$ ,  $KP\{6;6;0\}$ .  $DF * KP = -36 + 36 + 0 = 0$ , значит  $DF \perp KP$ , а значит параллелограмм  $DKFP$  – ромб.

#### Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (общее задание)

1. В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найти угол между прямой  $AD_1$  и плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $A_1$ ,  $E$  и  $M$ , где точка  $E$  – середина ребра  $C_1 D_1$ , а точка  $M$  лежит на ребре  $DD_1$ , так, что  $D_1 M = 2DM$ .
2. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , все ребра которой равны 1, найти угол между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $ACE_1$ .
3. В правильной четырехугольной пирамиде  $МАВСК$ , все ребра которой равны 1, найти угол между прямой  $KE$ , где  $E$  – середина апофемы  $MP$  грани  $AMB$ , и плоскостью  $AMC$ .

Критерии оценки:

- «3» - 1 верно выполненных примера
- «4» - 2 верно выполненных примера
- «5» - 3 верно выполненных примера

### ***Практическое занятие №41 «Решение задач на нахождение первообразных».***

**Цель работы:** закрепить умения и навыки находить первообразную функции используя правила и формулы для нахождения первообразных.

#### **Краткие теоретические сведения**

**Определение.** Функция  $F(x)$  называется первообразной для функции  $f(x)$  на данном промежутке, если для любого  $x$  из данного промежутка  $F'(x) = f(x)$ .

**Основное свойство первообразных.**

Если  $F(x)$  – первообразная функции  $f(x)$ , то и функция  $F(x) + C$ , где  $C$  – произвольная постоянная, также является первообразной функции  $f(x)$  (т.е. все первообразные функции  $f(x)$  записываются в виде  $F(x) + C$ ).

Таблица первообразных.

| Функция       | $k$<br>(постоянная) | $x^p,$<br>$p \neq -1$     | $\frac{1}{x}$ | $e^x$     | $a^x$                   | $\sin x$      | $\cos x$     |
|---------------|---------------------|---------------------------|---------------|-----------|-------------------------|---------------|--------------|
| Первообразная | $kx + C$            | $\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ | $\ln x  + C$  | $e^x + C$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ | $-\cos x + C$ | $\sin x + C$ |

**Правила нахождения первообразных.**

Пусть  $F(x)$  и  $G(x)$  – первообразные соответственно функций  $f(x)$  и  $g(x)$ .

Тогда:

1.  $F(x) \pm G(x)$  – первообразная для  $f(x) \pm g(x)$ ;
2.  $a F(x)$  – первообразная для  $a f(x)$ ;
3.  $\frac{1}{k} F(kx+b)$  – первообразная для  $a f(kx+b)$ .

**Примеры.**

1. Выяснить, является ли функция  $F(x) = x^3 - 3x + 1$  первообразной для функции  $f(x) = 3(x^2 - 1)$ .

Решение:  $F'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = f(x)$ , т.е.  $F'(x) = f(x)$ , следовательно,  $F(x)$  является первообразной для функции  $f(x)$ .

2. Найти все первообразные функции  $f(x)$  :

а)  $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$

Решение: Используя таблицу и правила нахождения первообразных, получим:

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + 3 \frac{x^3}{3} + 5x + C = \frac{x^5}{5} + x^3 + 5x + C$$

Ответ:  $\frac{x^5}{5} + x^3 + 5x + C$

б)  $f(x) = \sin(3x - 2)$

Решение:

$$F(x) = \frac{1}{3}(-\cos(3x - 2)) + C = -\frac{1}{3}\cos(3x - 2) + C$$

Ответ:  $-\frac{1}{3}\cos(3x - 2) + C$

Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (по вариантам)

### Вариант №1

1. Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x)$  :

а)  $f(x) = 2x^3 - x^2 - 1$ ;

б)  $f(x) = (2x - 3)^4$ ;

в)  $f(x) = 3\cos 2x$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{(5x - 1)^4}$ .

2. Для функции  $y = x^4 - 3x$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M(-2; 12)$ .

3. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой

$V(t) = 3t^2 - 4t + 2$ . Запишите формулу зависимости ее координаты  $x$  от времени  $t$ , если известно, что в начальный момент времени ( $t=0$ ) точка находилась в начале координат.

### Вариант 2

1. Найдите общий вид первообразных для функции  $f(x)$ :

а)  $f(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$ ;

б)  $f(x) = (4x - 5)^6$ ;

в)  $f(x) = 1 - \sin 4x$ ;

г)  $f(x) = \frac{2}{(3x + 2)^5}$ .

2. Для функции  $y = 2x^3 + 4x$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M(-1; -6)$ .

3. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой

$V(t) = 2t^3 - t + 5$ . Запишите формулу зависимости ее координаты  $x$  от времени  $t$ , если известно, что в начальный момент времени ( $t=0$ ) точка находилась в начале координат.

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных примера

«4» - 5 верно выполненных примера

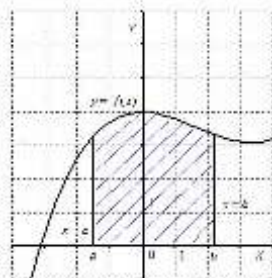
«5» - 6 верно выполненных примера

### **Практическое занятие №42 «Решение задач на нахождение площади криволинейной трапеции».**

**Цель работы:** усвоить формулу Ньютона- Лейбница, закрепить умения и навыки применять ее при нахождении площади криволинейной трапеции

#### **Краткие теоретические сведения**

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная осью  $OX$  прямыми  $x=a$ ,  $x=b$  и графиком непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции  $y=f(x)$ , которая не меняет знак на этом промежутке. Пусть данная фигура расположена *не ниже* оси абсцисс:



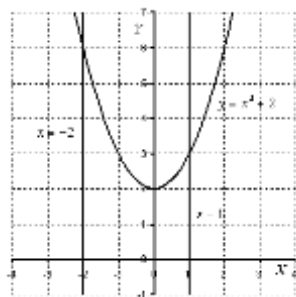
Тогда площадь криволинейной трапеции численно равна определенному

интегралу  $\int_a^b f(x)dx$ .

#### **Пример 1**

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=x^2+2$ ,  $y=0$ ,  $x=-2$ ,  $x=1$ .

Выполним чертеж (обратите внимание, что уравнение  $y=0$  задает ось  $OX$ ):



На отрезке  $[-2; 1]$  график функции  $y=x^2+2$  расположен над осью  $OX$ , поэтому:

$$S = \int_{-2}^1 (x^2 + 2) dx = \left( \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{1}{3} + 2 - \left( -\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Ответ: 9

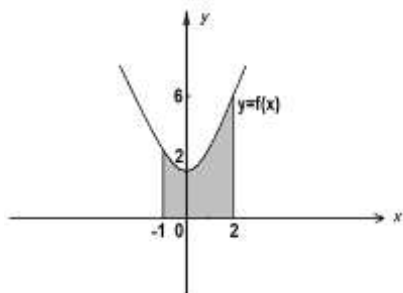
Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (общее задание)

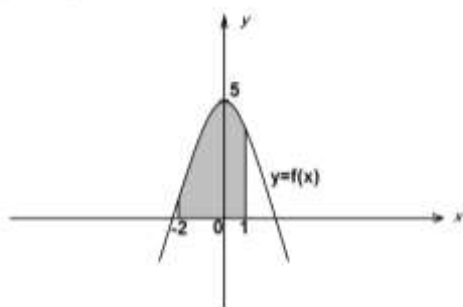
Задания:

1. По готовому чертежу найти площадь заштрихованной фигуры.

а)  $f(x) = x^2 + 2$



б)  $f(x) = 5 - x^2$



2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 8 - x^3$

Критерии оценки:

- «3» - 1 верно выполненное задание
- «4» - 2 верно выполненных заданий
- «5» - 3 верно выполненных заданий

***Практическое занятие №43 «Вычисление интегралов».***

**Цель работы:** усвоить понятие интеграла, алгоритм вычисления определенного интеграла, формировать навыки применения правил и методов

**Краткие теоретические сведения**

В общем виде определенный интеграл записывается так:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Нижний предел интегрирования стандартно обозначается буквой  $a$ .

Верхний предел интегрирования стандартно обозначается буквой  $b$ .

Отрезок  $[a; b]$  называется *отрезком интегрирования*.

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Этапы решения определенного интеграла следующие:

1) Сначала находим первообразную функцию  $F(x)$  (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа  $C$  в определенном интеграле не добавляется. Обозначение  $\Big|_a^b$  является чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчёркивание. Зачем нужна сама запись  $F(x) \Big|_a^b$ ? Подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию:  $F(b)$ .

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию:  $F(a)$ .

4) Рассчитываем разность  $F(b) - F(a)$ , то есть, находим число.

#### Пример 1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2 dx \stackrel{(1)}{=} 2 \int_1^2 x^2 dx \stackrel{(2)}{=} \frac{2}{3} (x^3) \Big|_1^2 \stackrel{(3)}{=} \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

#### Пример 2

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx$$

Решение:

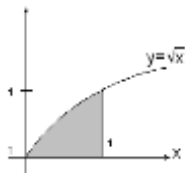
$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 (8 + 2x - x^2) dx &= \left( 8x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^4 = \\ &= \left( 32 + 16 - \frac{64}{3} \right) - \left( -16 + 4 + \frac{8}{3} \right) = \frac{80}{3} + \frac{28}{3} = 36 \end{aligned}$$

#### Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (по вариантам)

#### **Вариант 1**

1. Запишите с помощью интеграла площадь фигуры, изображенной на рисунке:



2. Вычислите интеграл:

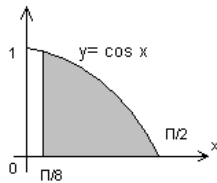
1)  $\int_{-1}^2 dx$ ; 2)  $\int_{-2}^5 x dx$ ; 3)  $\int_{-1}^2 x^3 dx$  4)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

а)  $y = 4x - x^2, y=0, x=5$

## Вариант 2

1. Запишите с помощью интеграла площади фигуры, изображенной на рисунке:



2. Вычислите интеграл:

1)  $\int_0^3 5 dx$ ; 2)  $\int_0^1 x^2 dx$ ; 3)  $\int_{-2}^{-1} (x^3 - x) dx$  4)  $\int_1^4 (3 - 2x) dx$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = 4 - x^2, y=0$

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных заданий

«4» - 5 верно выполненных заданий

«5» - 6 верно выполненных заданий

## Практическое занятие №44 «Вычисление площадей с помощью интегралов».

**Цель работы:** закрепить умения и навыки строить графики различных функций, вычислять площади плоских фигур с помощью определенного интеграла.

### Краткие теоретические сведения

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

### Пример

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = -x$ .

Решение: Сначала нужно выполнить чертеж. Вообще говоря, при построении чертежа в задачах на площадь нас больше всего интересуют точки пересечения линий. Найдем точки пересечения параболы  $y = 2x - x^2$  и прямой  $y = -x$ . Это можно сделать двумя способами. Первый способ – аналитический. Решаем уравнение:

$$2x - x^2 = -x$$

$$3x - x^2 = 0$$

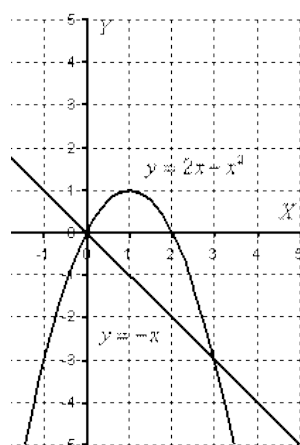
$$x(3 - x) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3$$

Значит, нижний предел интегрирования  $a = 0$ , верхний предел интегрирования  $b = 3$ .

Гораздо выгоднее и быстрее построить линии поточечно. Тем не менее, аналитический способ нахождения пределов все-таки приходится иногда применять, если, например, график достаточно большой, или поточечное построение не выявило пределов интегрирования (они могут быть дробными или иррациональными).

Возвращаемся к нашей задаче: рациональнее сначала построить прямую и только потом параболу. Выполним чертеж:



Если на отрезке  $[a, b]$  некоторая непрерывная функция  $f(x)$  больше либо равна некоторой непрерывной функции  $g(x)$ , то площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , можно

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

найти по формуле:

Важно, какой график ВЫШЕ (относительно другого графика), а какой – НИЖЕ.

В рассматриваемом примере очевидно, что на отрезке  $[0; 3]$  парабола располагается выше прямой, а поэтому из  $2x - x^2$  необходимо вычесть  $-x$

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left( \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0 + 0 = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

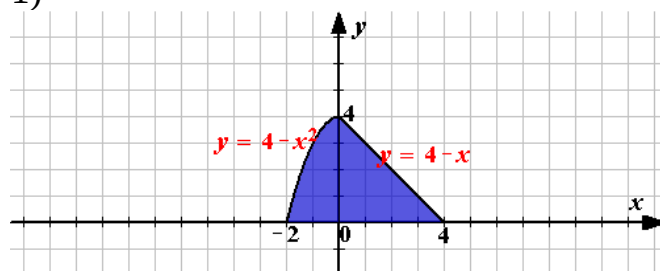
Ответ:  $S = 4\frac{1}{2}$

Задание:

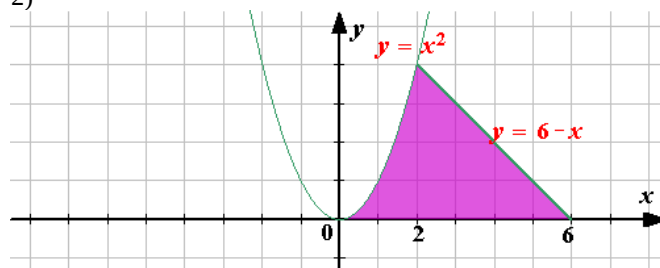
1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (общее задание)

Задание: вычислите площадь заштрихованной фигуры:

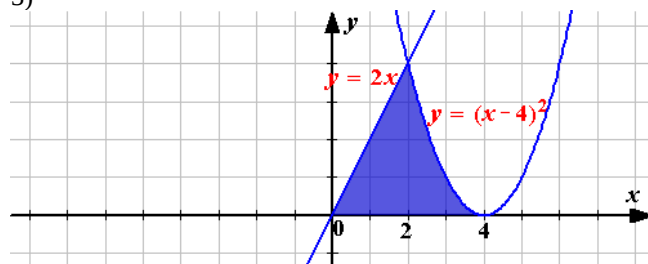
1)



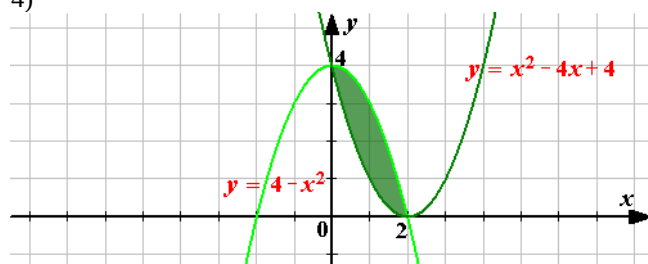
2)



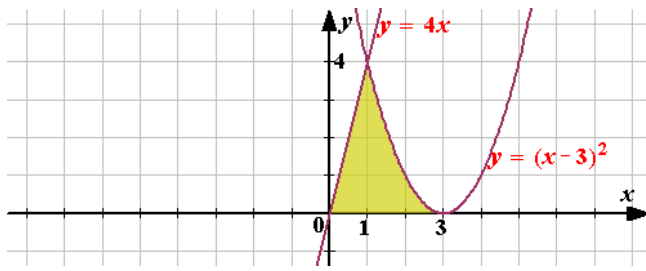
3)



4)



5)



Критерии оценки:

«3» - 3 верно выполненных примера

«4» - 4 верно выполненных примера

«5» - 5 верно выполненных примера

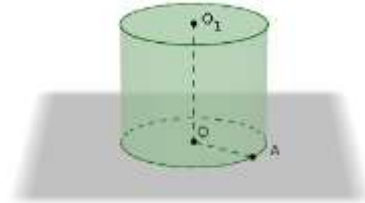
### ***Практическое занятие №45 «Цилиндр. Площадь поверхности цилиндра».***

**Цель работы:** формировать навык решения задач на нахождение элементов цилиндра и площадь его поверхности

#### **Краткие теоретические сведения**

Цилиндром называется тело, которое состоит из двух кругов, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Эти круги называются основаниями цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки оснований, — образующими цилиндра.

Если образующие перпендикулярны основаниям, то цилиндр называется прямым цилиндром.



Радиусом цилиндра является радиус его основания. Высотой цилиндра является расстояние между основаниями.

**Свойства цилиндра:**

- Основания цилиндра лежат в параллельных плоскостях;
- Образующие цилиндра параллельны и равны;

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований.

Ось цилиндра параллельна его образующим.

Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности.

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, представляет собой прямоугольник, две стороны которого образующие цилиндра, а две другие — параллельные хорды его основ.

Осевым сечением цилиндра называется сечение, проходящей через его ось. Осевое сечение цилиндра является прямоугольником.

Цилиндр, осевое сечение которого является квадратом, называется равносторонним цилиндром.

Если  $h$  — высота цилиндра, а  $r$  — радиус основания цилиндра, то площадь его поверхности можно найти с помощью следующих формул:

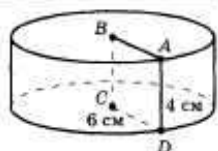
Площадь боковой поверхности цилиндра:  $S_{\text{бок}} = 2\pi rh$ ,

Площадь полной поверхности:  $S = 2\pi r(r+h)$ .

Задача. Прямоугольник, стороны которого равны 6 см и 4 см, вращается около меньшей стороны. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Дано:  $ABCD$  — прямоугольник,  $AB = 6$  см,  $BC = 4$  см,  $BC$  — ось вращения.

Найти:  $S_{\text{пов. тела вращ.}}$   
Решение. Данное тело вращения — прямой круговой цилиндр с высотой  $BC = 4$  см и радиусом основания  $AB = 6$  см.



Площадь боковой поверхности  $S_{\text{бок. пов.}} = 2\pi \cdot 6 \cdot 4 = 48\pi$  (см<sup>2</sup>).

Площадь основания  $S_{\text{осн}} = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$  (см<sup>2</sup>).

Площадь полной поверхности  $S_{\text{пов. тела вращ.}} = 48\pi + 2 \cdot 36\pi = 120\pi$  (см<sup>2</sup>).

Ответ:  $120\pi$  см<sup>2</sup>.

Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (по вариантам)

### 1 вариант

1. На каком из рисунков изображен цилиндр?



2. Цилиндр можно получить в результате...

- А) вращения квадрата вокруг любой его оси симметрии;
- Б) вращения квадрата вокруг его стороны;
- В) вращения прямоугольника вокруг одной из его диагоналей;
- Г) вращения прямоугольника вокруг одной из прямых, соединяющих середины двух его противоположных сторон.

3. Укажите верные утверждения:

- А) образующие цилиндра параллельны и равны;
- Б) любое сечение цилиндра является овалом;
- В) сечение цилиндра, параллельное оси, — прямоугольник;
- Г) цилиндр не имеет центра симметрии.

4. Прямоугольник со сторонами 4 см и 8 см вращается вокруг своей меньшей стороны. Чему равна площадь основания полученного тела?

- А)  $256\pi$  см<sup>2</sup>;    Б)  $16\pi$  см<sup>2</sup>;    В)  $64\pi$  см<sup>2</sup>;    Г) нет верного ответа.

5. Высота цилиндра равна 6 см, а радиус его основания — 2 см. Чему равна площадь осевого сечения?

- А)  $12$  см<sup>2</sup>;    Б)  $6$  см<sup>2</sup>;    В)  $24$  см<sup>2</sup>;    Г)  $8$  см<sup>2</sup>.

6. Площадь осевого сечения цилиндра равна  $64$  см<sup>2</sup>, а площадь основания —  $16\pi$  см<sup>2</sup>. Чему равна высота цилиндра?

А) 8 см; Б) 4 см; В)  $4\pi$  см; Г) 38 см.

7. Высота цилиндра равна 7 см, диаметр основания — 26 см. Концы отрезка  $MN$ , равного 25 см, лежат на окружностях обоих оснований отрезка. Чему равно кратчайшее расстояние от отрезка  $MN$  до оси цилиндра?

А) 13 см; Б) 6 см; В) 5 см; Г) нет верного ответа.

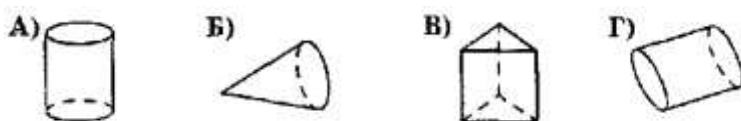
8. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого  $100 \text{ см}^2$ .

Определите площадь основания цилиндра.

9. Осевое сечение цилиндра — квадрат, длина диагонали которого равна 20 см. Найдите радиус основания цилиндра.

## 2 вариант

1. На каком из рисунков изображен цилиндр?



2. Цилиндр можно получить в результате...

А) вращения квадрата вокруг одной из его диагоналей;

Б) вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон;

В) вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов;

Г) вращения прямоугольника вокруг одной из его осей симметрии.

3. Укажите верные утверждения:

А) ось цилиндра параллельна его образующей;

Б) основания цилиндра лежат в параллельных плоскостях;

В) сечение цилиндра, параллельное его оси, есть окружность;

Г) цилиндр имеет одну плоскость симметрии.

4. Квадрат со стороной 10 см вращается вокруг своей стороны. Чему равна площадь основания полученного тела?

А)  $25\pi \text{ см}^2$ ; Б)  $400\pi \text{ см}^2$ ; В)  $100\pi \text{ см}^2$ ; Г) нет верного ответа.

5. Площадь осевого сечения цилиндра равна  $24 \text{ см}^2$ , а радиус его основания — 2 см. Чему равна высота цилиндра?

А) 12 см; Б) 6 см; В) 4 см; Г) 22 см.

6. Площадь осевого сечения цилиндра равна  $40 \text{ см}^2$ , а площадь его основания —  $25\pi \text{ см}^2$ . Чему равна высота этого цилиндра?

А)  $\frac{16}{5}$  см; Б) 8 см; В) 4 см; Г) 2 см.

7. Высота цилиндра равна 6 см, радиус основания — 5 см. Концы отрезка  $AB$ , равного 10 см, лежат на окружностях обоих оснований. Чему равно кратчайшее расстояние от отрезка  $AB$  до оси цилиндра?

А) 5 см; Б) 3 см; В) 1 см; Г) нет верного ответа.

8. Квадрат со стороной 2 см свернули в форму цилиндра. Найдите площадь основания этого цилиндра.

9. Площадь осевого сечения цилиндра равна 6 см, а площадь основания цилиндра равна  $25\pi \text{ см}^2$ . Найдите высоту цилиндра.

Критерии оценки:

«3» - 5-6 верно выполненных заданий

«4» - 7-8 верно выполненных заданий

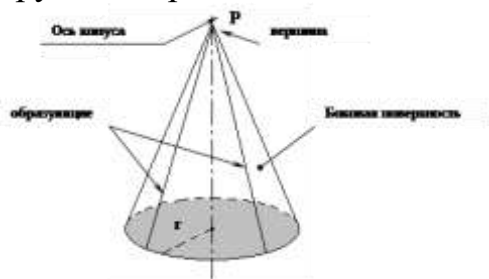
«5» - 9 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №46 «Конус. Площадь поверхности конуса».***

**Цель работы:** формировать навык решения задач на нахождение элементов конуса и площадь его поверхности

#### **Краткие теоретические сведения**

Конус - это тело, состоящее из круга, точки, не лежащей на плоскости круга, и отрезков, соединяющих эту точку с точками круга.



Прямым является конус, у которого прямая, соединяющая вершину конуса с центром его основания, перпендикулярна к плоскости основания. Высота конуса есть перпендикуляр, опущенный из вершины на площадь основания.

Осью прямого конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Плоскость, параллельная основе прямого конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса.

Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то его сечение - это равнобедренный треугольник, основание которого равен диаметру основания конуса, а боковые стороны являются образующими конуса.

Такой сечение называется осевым.

Конус, осевой сечение которого является равносторонним треугольником, называется равносторонним конусом. Если секущая плоскость проходит через вершину конуса под углом к плоскости основания, то его сечение - это равнобедренный треугольник, основание которого является хордой основания конуса, а боковые стороны - образующими конуса.

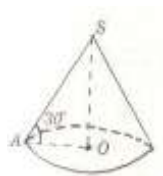
Если  $l$  — длина образующей конуса,  $h$  — высота конуса, а  $r$  — радиус основания конуса, то

Площадь боковой поверхности конуса:  $S_{\text{бок}} = \pi r l$ ,

Площадь полной поверхности:  $S = \pi r(r + l)$ .

Задача.

Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$ , а высота конуса равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Решение:  $\triangle ASO$  - прямоугольный  
 ( $SO \perp$  основанию),  $\angle SAO = 30^\circ$ ,  $SO$  (лежит против

угла  $30^\circ$ )  $= \frac{1}{2} AS$ , тогда  $AS = 2OS = 2 \cdot 12 = 24$ . По т.

Пифагора  $OA =$

$$\sqrt{AS^2 - OS^2} = \sqrt{24^2 - 12^2} = \sqrt{576 - 144} = \sqrt{432} = \sqrt{144 \cdot 3} = 12\sqrt{3}$$

$$; S_{\text{б.}} = \pi \cdot r \cdot l = \pi \cdot 12\sqrt{3} \cdot 24 = 288\pi\sqrt{3} \quad \text{Ответ: } S_{\text{б.}} =$$

$$288\pi\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (по вариантам)

### Вариант 1.

1. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если образующая равна 5 см, а радиус основания 3 см.
2. Образующая конуса равна 7 см, а радиус основания 3 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.
3. Высота конуса равна 12 см, образующая 13 см. Найдите площадь полной поверхности конуса.
- 4 Радиусы оснований усеченного конуса 2 дм и 5 дм, высота 4 дм. Найдите  $S$  боковой поверхности конуса.

### Вариант 2.

1. Найдите площадь боковой поверхности равностороннего конуса (осевое сечение – равносторонний треугольник), если радиус основания равен 5 см.
2. Площадь основания конуса равна  $25\pi \text{ см}^2$ , а образующая равна 6 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
3. Найдите площадь полной поверхности конуса, если образующая наклонена к плоскости основания под углом  $60^\circ$ , а высота равна 6 см.
- 4 Радиусы оснований усеченного конуса 3 дм и 6 дм, высота 4 дм. Найдите  $S$  боковой поверхности конуса.

Критерии оценки:

«3» - 2 верно выполненных заданий

«4» - 3 верно выполненных заданий

«5» - 4 верно выполненных заданий

## ***Практическое занятие №47 «Сфера. Площадь поверхности».***

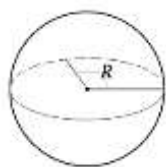
**Цель работы:** формировать навык решения задач на нахождение элементов сферы (шара) и площадь ее поверхности

### **Краткие теоретические сведения**

Шар - это тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся от данной точки на одинаковом расстоянии.

Центром шара данная точка, радиусом шара называется данное расстояние.

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на определенном расстоянии от данной точки.



Диаметром шара есть отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр шара. Концы любого диаметра пули называется диаметрально противоположными точками шара.

Любой сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга является основой перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Любая плоскость, проходящая через центр шара, является ее плоскостью симметрии.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется диаметральной плоскостью. Центр шара является его центром симметрии.

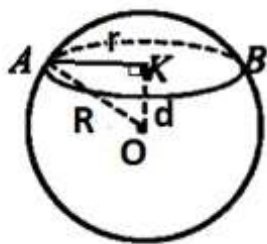
Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью, общая точка - точка касания.

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы с плоскостью, перпендикулярен к касательной плоскости. Если радиус сферы перпендикулярен плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Линия пересечения двух сфер есть круг.

Площадь поверхности шара равна  $S=4\pi R^2$ .

Задача. Шар радиуса 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.



Решение:

1. Так как,  $d < R$ , следовательно сечением шара является круг. Чтобы найти площадь круга, сначала надо найти его радиус.

2. Рассмотрим треугольник АОК –

прямоугольный.  $AK = \sqrt{AO^2 + OK^2} = \sqrt{41^2 + 9^2} = 40 \text{ дм}$  - по теореме Пифагора.

3. Подставим значение радиуса в формулу площади

круга:  $S_{\text{сеч.}} = \pi r^2 = \pi 40^2 = 1600\pi (\text{дм}^2)$ .

Ответ:  $1600\pi \text{ дм}^2$ .

#### Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (по вариантам)

#### **Вариант 1.**

- 1) Радиус шара равен 17 см. Найдите площадь сечения шара, удаленного от его центра на 15 см.
- 2) Длина окружности сечения сферы радиуса 10 см равна  $16\pi$  см. Найти расстояние от центра сферы до плоскости сечения.
- 3) Площадь большого круга равна  $16\pi \text{ см}^2$ . На каком расстоянии от центра шара находится сечение, площадь которого составляет  $\frac{3}{4}$  от площади большого круга?

#### **Вариант 2**

- 1) Радиус сферы равен 15 см. найдите длину окружности сечения, удаленного от центра сферы на 12 см
- 2) В шаре радиуса 13 см проведено сечение, площадь которого равна  $25\pi \text{ см}^2$ . Найти расстояние от центра шара до плоскости сечения.
- 3) Площадь большого круга равна  $36\pi \text{ см}^2$ . На каком расстоянии от центра шара находится сечение, площадь которого составляет  $\frac{2}{3}$  от площади большого круга?

Критерии оценки:

- «3» - 1 верно выполненное задание
- «4» - 2 верно выполненных заданий
- «5» - 3 верно выполненных заданий

#### ***Практическое занятие №48 «Объем цилиндра в задачах технического содержания».***

**Цель работы:** формировать навык нахождения объема цилиндра в задачах технического содержания.

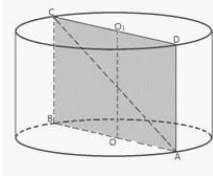
#### **Краткие теоретические сведения**

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.  
Если радиус основания цилиндра  $R$ , а высота  $H$ , то формула его объема такова:

$$V = \pi R^2 H.$$

Пример 1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 12 см и образует с плоскостью нижнего основания угол  $45^\circ$ . Найти объем цилиндра.

*Решение.*



Так как угол между диагональю и высотой тоже равен  $45^\circ$  ( $180 - 90 - 45$ ), то  $\triangle ABC$  равнобедренный и высота цилиндра равна его диаметру. По теореме Пифагора:  $d^2 + d^2 = 12^2$ ;  $2d^2 = 144$ ;  $d^2 = 72$ ;  $d = 6\sqrt{2} = H$ ,  $r = 3\sqrt{2}$ . Тогда объем цилиндра  $V = \pi R^2 H$ ;  $V = \pi (3\sqrt{2})^2 6\sqrt{2} = 108\sqrt{2} \pi$ .

*Ответ:*  $108\sqrt{2} \pi$ .

Пример 2.

Осевое сечение цилиндра - квадрат, диагональ которого равна  $4\sqrt{2}$ .  
Вычислить объем цилиндра

*Решение.* Пусть сторона квадрата  $a$ . По теореме Пифагора:  $a^2 + a^2 = (4\sqrt{2})^2$ ;  $2a^2 = 32$ ;  $a^2 = 16$ ;  $a = 4$ . Тогда  $R = 2$ ,  $H = 4$ . Объем цилиндра:  $V = \pi R^2 H$ ;  $V = \pi 2^2 4 = 16\pi$ .

*Ответ:*  $16\pi$ .

Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (общее задание)

Задачи:

1. Сколько тонн бензина можно хранить в цистерне цилиндрической формы, если её диаметр 5м, длина 3м? Плотность бензина  $0,7\text{г/см}^3$ .
2. Какой объем земли необходимо выбрать для строительства железнодорожного тоннеля длиной 400м и высотой 4м?
3. Железнодорожный туннель длиной 147 м необходимо пробурить с круглым поперечным сечением радиусом 5 м. Какой объем грунта необходимо вырыть?
4. Вычислите количество нефти в тоннах, находящейся в цистерне цилиндрической формы, диаметр которой равен 22 м, а высота 8м, плотность нефти  $800\text{ кг/м}^3$ .
5. Стальной вал, имеющий 1,40 м длины и 0,083 м в диаметре, обтачивается на токарном станке, причём его диаметр уменьшается

на 0,003 м. Сколько он теряет в весе благодаря обточке? (плотность стали 7,4г/см<sup>3</sup>)

6. Свинцовая труба с толщиной стенок в 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Сколько весят 25 м этой трубы, если плотность свинца 11,4г/см<sup>3</sup>?

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных заданий

«4» - 5 верно выполненных заданий

«5» - 6 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №49 «Объем конуса в задачах технического содержания».***

**Цель работы:** формировать навык нахождения объема конуса в задачах технического содержания.

#### **Краткие теоретические сведения**

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Если радиус основания конуса  $R$ , а высота  $H$ , то объем его находится по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

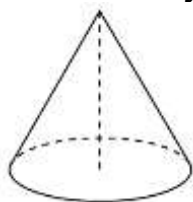
Объем усеченного конуса можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2),$$

где  $r$  и  $R$  - радиусы оснований,  $H$  — высота усеченного конуса.

Пример 1.

Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объем.



Для того, чтобы найти объем конуса необходимо знать высоту и площадь основания:

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot H$$

Высота известна. Необходимо найти площадь основания. Нам известна образующая и высота конуса, можем вычислить радиус основания и затем

уже найти его площадь. По теореме Пифагора:

$$l^2 = R^2 + H^2$$

$$R^2 = l^2 - H^2 = 10^2 - 6^2 = 64$$

Оставим квадрат радиуса (именно это значение необходимо для дальнейшего вычисления), сам радиус нам не нужен.

Таким образом, объём конуса будет равен:

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 64 \cdot 6 = 128\pi$$

Ответ:  $128\pi$ .

#### Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (без вариантов)

#### Задачи:

1. Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2м и образующая 3,5м. Сколько надо везов, чтобы перевезти весь щебень, уложенный в десяти таких кучах, если 1 м<sup>3</sup> щебня весит 3 т и на один воз грузят 0,5 т.
2. По статистике на Земле ежегодно гибнет от разрядов молний 6 человек на 1 000 000 жителей (чаще в южных странах). Громоотвод образует конус безопасности. Будет ли защищен во время грозы дом высотой 6 м, шириной 8 м и длиной 10 м, если высота громоотвода 7 м, а угол между громоотводом и образующей конуса безопасности равен 60 ° ?
3. На станции железной дороги насыпана конусообразная куча угля; ее высота 4м, уклон 30°. Сколько потребуется вагонов для перевозки этого угля; грузоподъемность вагона 25т. (плотность угля 1300 кг на кубический метр).
4. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 1/2 высоты. Объём жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?
5. Авиационная бомба среднего калибра дает при взрыве воронку диаметром 6 м и глубиной 2 м. Какое количество земли (по массе) выбрасывает эта бомба, если 1 м<sup>3</sup> земли имеет массу 1650 кг?

#### Критерии оценки:

- «3» - 3 верно выполненных заданий
- «4» - 4 верно выполненных заданий
- «5» - 5 верно выполненных заданий

***Практическое занятие №50 «Объём шара».***

**Цель работы:** сформировать навык нахождения объема шара, площади сферы.

### **Краткие теоретические сведения**

Площадь поверхности шара равна  $S=4\pi R^2$ .

Формула объема шара радиуса  $R$  такова:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Объем шарового сегмента, высота которого  $H$ , а радиус  $R$ , находится по формуле

$$V = \pi H^2 \left( R - \frac{H}{3} \right).$$

Формула объема шарового сектора:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H,$$

где  $R$  — радиус шара,  $H$  — высота соответствующего шарового сегмента.

### Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (общее задание)

### Задачи:

1. Радиус сферы равен 6 см. Найти площадь ее поверхности.
2. Радиус шара уменьшили в 4 раза. Как при этом изменилась площадь его поверхности?
3. Найти радиус шара, если известно, что его объем численно в 2 раза больше площади поверхности.
4. Плоскость, находящаяся на расстоянии 8 см от центра шара, пересекает его поверхность по линии, длина которой равна 12 см. Найти площадь поверхности
5. Радиус шара равен <sup>12</sup> см. Найдите объем шарового сектора, если высота шарового сегмента равна <sup>4</sup> см.

### Критерии оценки:

- «3» - 3 верно выполненных заданий
- «4» - 4 верно выполненных заданий
- «5» - 5 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №51 «Площади и объемы в задачах технического содержания».***

**Цель работы:** привить интерес к стереометрии через практико-ориентированные задачи.

### Краткие теоретические сведения

Объем прямоугольного параллелепипеда находится по формуле

**$V = abc$** , где  $a, b, c$  — ребра прямоугольного параллелепипеда. Исходя из этой формулы, можно получить формулу для объема куба.

Объем куба находят по формуле

**$V = a^3$** , где  $a$  — ребро куба..

Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту;

**$V = SH$** .

Объем пирамиды находится по формуле

**$V = \frac{1}{3} SH$** , где  $S$  — площадь основания,  $H$  — высота пирамиды.

Если радиус основания цилиндра  $R$ , а высота  $H$ , то формула его объема такова:

**$V = \pi R^2 H$** .

Если радиус основания конуса  $R$ , а высота  $H$ , то объем его находится по формуле

**$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$** .

Объем усеченного конуса можно найти по формуле

**$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$** , где  $r$  и  $R$  — радиусы оснований,  $H$  — высота

усеченного конуса.

Формула объема шара радиуса  $R$  такова:

**$V = \frac{4}{3} \pi R^3$** .

Объем шарового сегмента, высота которого  $H$ , а радиус  $R$ , находится по формуле

**$V = \pi H^2 \left( R - \frac{H}{3} \right)$** .

Формула объема шарового сектора:

**$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H$** , где  $R$  — радиус шара,  $H$  — высота соответствующего

шарового сегмента

Площадь сферы равна:

$S = 4\pi R^2$ , где  $R$  — радиус сферы

Задание:

1. Изучить теоретические положения.
2. Выполнить задания (без вариантов)

Задачи:

1. Вычислить объём дизтоплива в цистерне диаметром 2м и длиной 3м, если она заполнена на  $\frac{2}{3}$  объёма.
2. Полуцилиндрический свод подвала имеет 6 м длины и 5,8 м в диаметре. Сколько краски потребуется для окраски полной поверхности подвала при расходе  $250\text{г/м}^2$ .

3. Сколько литров воды вмещает яма, вырытая в виде усечённой пирамиды, если высота ямы 1,5м, сторона нижнего основания 0,8м, верхнего – 1,2м?
4. Моток стальной проволоки диаметром 3 мм имеет массу 35,8 кг. Какова ее длина?
5. Песок сыпан в кучу конической формы, длина окружности основания 18,84 м, длина образующей (ската) равна 5 м. Найти высоту конуса и его объем.
6. Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг. Найти диаметр шара (плотность чугуна 7,2 г/см<sup>3</sup>).

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных заданий

«4» - 5 верно выполненных заданий

«5» - 6 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №52 «Решение задач на вероятность».***

**Цель работы:** научиться вычислять вероятность события по классической формуле определения вероятности.

#### **Краткие теоретические сведения**

Согласно классическому определению вероятности *вероятностью события A* называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Вероятность события A определяется формулой:

$$P(A) = m/n,$$

где  $m$  – число элементарных исходов, благоприятствующих A;

$n$  – число всех возможных элементарных исходов испытания.

**Пример 1.** Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 5.

**Решение.**

|                |                                                                           |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Дано:          | Решение                                                                   |
| $k = 6$ –      | A – сумма выпавших очков на двух кубиках равна 5.                         |
| количество     | $P(A) = m/n$                                                              |
| граней кубика. | Событию A благоприятствуют следующие исходы: (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) → |
|                | $m = 4$                                                                   |
|                | Каждый из кубиков можно бросить шестью способами. Тогда                   |

|            |                                                                                                                            |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|            | два кубика по правилу умножения могут упасть $6 \cdot 6 = 36$ способами $\rightarrow n = 36$<br>$P(A) = 4/36 = 1/9 = 0,11$ |
| $P(A) - ?$ | Ответ: $P(A) = 0,11$                                                                                                       |

*Пример 2.* В группе 25 студентов. Из них 12 юношей и 13 девушек. Известно, что к доске должны быть вызваны двое учащихся. Какова вероятность, что это юноши?

*Решение.*

|                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Дано:<br>$K = 12$<br>$L = 13$<br>$N = 25$ | Решение<br>$A$ – к доске вызваны два юноши.<br>$P(A) = m/n$<br>Число всех исходов равно количеству способов, которыми можно выбрать двух учащихся из 25 (причем порядок вызова к доске не важен) $\rightarrow$<br>$n = C_{25}^2 = 300$<br>Число благоприятствующих исходов равно числу способов выбора двух юношей из 12 $\rightarrow m = C_{12}^2 = 66$<br>$P(A) = 66/300 = 11/50 = 0,22$ |
| $P(A) - ?$                                | Ответ: $P(A) = 0,22$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (по вариантам)

|    | <b>I вариант</b>                                                                                                                                          | <b>II вариант</b>                                                                                                                                                                                                |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | В коробке лежат 6 красных и 4 синих карандаша. Наугад вытаскиваются один из них. Найти вероятности событий того, что извлеченный карандаш красного цвета. | В коробке лежат 3 красных, 6 синих и 5 зеленых карандашей. Наугад вытаскиваются один из них. Найти вероятности событий того, что извлеченный карандаш красного цвета.                                            |
| 2. | Бросаются два игровых кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 6.                                                                       | Бросаются два игровых кубика. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна 8.                                                                                                                              |
| 3. | Слово ПЛОМБИР разрезается на буквы. Буквы перемешиваются и снова складываются слева направо. Найти вероятность того, что снова получится слово ПЛОМБИР.   | Из буквы разрезной азбуки составлено слово ДОКУМЕНТ. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово ДОКУМЕНТ |
| 4. | В пачке находятся одинаковые                                                                                                                              | На полке лежат 5 учебников и 6                                                                                                                                                                                   |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | по размеру 10 тетрадей в линейку и 6 в клетку. Из пачки наугад берут 4 тетради. Какова вероятность того, что все 4 тетради окажутся в клетку?                                                                                                     | художественных книг. С полки наугад снимают 3 книги. Какова вероятность того, что они окажутся учебниками?                                                                                                                                                                                                                   |
| 5. | На каждой из семи одинаковых карточек напечатана одна из букв: а, с, т, р, у, ж, л. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность, что на четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «стул» | На каждой из семи одинаковых карточек напечатана одна из букв: д, а, т, о, с, ж, к. Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность, что на пяти, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «доска»                                                                              |
| 6. | В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.                                                                                       | В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.                                                                                                                                                           |
| 7  | В сборнике билетов по геометрии всего 25 билетов, в трех из них встречается вопрос о конусе. На экзамене школьник достается один случайно выбранный билет из этого сборника. Найти вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о конусе. | В международных соревнованиях по фигурному катанию участвуют 25 спортсменок из разных стран, в том числе по три из США и России и по две из Японии и Швеции. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, будет представлять какую-то другую из оставшихся стран? |

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных заданий

«4» - 5-6 верно выполненных заданий

«5» - 7 верно выполненных заданий

***Практическое занятие №53 «Вероятность в профессиональных задачах».***

**Цель работы:** привить интерес к математике через практико-ориентированные задачи, связанные с профессиональной деятельностью.

**Краткие теоретические сведения**

Вероятностью события  $A$  называется отношение числа благоприятных для  $A$  исходов к числу всех равновозможных исходов:  $P(A) = m/n$ , где  $n$  — общее число равновозможных исходов,  $m$  — число исходов, благоприятствующих событию  $A$ .

Противоположные события

Событие, противоположное событию  $A$ , обозначают  $\bar{A}$ . При проведении испытания всегда происходит ровно одно из двух противоположных событий и

Объединение несовместных событий

Два события  $A$  и  $B$  называют несовместными, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию  $A$ , так и событию  $B$ .

Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий  $A$  и  $B$ :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Пересечение независимых событий

Два события  $A$  и  $B$  называют независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого события.

Событие  $C$  называют пересечением событий  $A$  и  $B$  (пишут  $C = A \cap B$ ), если событие  $C$  означает, что произошли оба события  $A$  и  $B$ .

Если события  $A$  и  $B$  независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий  $A$  и  $B$ :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Формула сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Задание:

1. Изучить теоретические положения
2. Выполнить задания (общее задание)

Задачи:

1. Железнодорожный состав из 9 вагонов и вагона–ресторана формируется произвольным образом. Какова вероятность того, что вагон №7 и вагон–ресторан расположены рядом.

2. В плацкарном вагоне 54 места. Нечётные места–нижние полки, а четные верхние. Места с 37 по 54 боковые. 53 школьника с сопровождающим едут в летний лагерь и полностью заняли вагон. У сопровождающего место №11, остальные билеты случайным образом распределены между школьниками. Какова вероятность, что школьнику Степанову достанется билет на нижнюю не боковую полку?

3. Имеется 3 ящика, содержащих по 20 деталей. В первом ящике 12,

во втором 5 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

4. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны:  $p_1 = 0,1$ ;  $p_2 = 0,15$ ;  $p_3 = 0,2$ . Найти вероятность того, что тока в цепи не будет (не работает хотя бы 1 элемент).

5. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Слесарь наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

6. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

7. Три человека садятся в поезд, в котором 12 вагонов. Найти вероятность того что, хотя бы два из них окажутся в одном вагоне

Критерии оценки:

«3» - 3-4 верно выполненных заданий

«4» - 5-6 верно выполненных заданий

«5» - 7 верно выполненных заданий

### ***Практическое занятие №54 «Решение задач на случайную дискретную величину».***

**Цель работы:** закрепить умения и навыки применения закон распределения дискретной случайной величины табличным способом, с помощью многоугольника распределения и функции распределения.

#### **Краткие теоретические сведения**

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Для задания дискретной случайной величины необходимо перечислить все возможные ее значения и указать их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называет

соответствие между возможными значениями и их вероятностями. Его можно задать таблично, аналитически в виде функции распределения и графически с помощью многоугольника распределения.

*Пример 1.* Возможные значения случайной величины таковы:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 5$ ,  $x_3 = 8$ . Известны вероятности первых двух возможных значений:  $p_1 = 0,4$ ;  $p_2 = 0,15$ . Найти вероятность  $x_3$ .

*Решение.* Так как в одном испытании случайная величина принимает одно и только одно возможное значение, то события  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  образуют полную группу; следовательно сумма вероятностей этих событий равна единице:  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2 = 1 - 0,4 - 0,15 = 0,45$$

*Пример 2.* В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 500 и десять выигрышей по 10 рублей. Найти закон распределения случайной величины  $X$  – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

*Решение.*

1. Возможные значения выигрыша:  $x_1 = 500$ ,  $x_2 = 10$ ,  $x_3 = 0$ .

2. Вероятности возможных значений:

$p_1 = 1/100 = 0,01$  (количество выигрышей в 500 рублей делится на общее количество билетов);

$p_2 = 10/100 = 0,1$  (количество выигрышей в 10 рублей делится на общее количество билетов);

$$p_3 = 1 - (0,01 + 0,1) = 0,89.$$

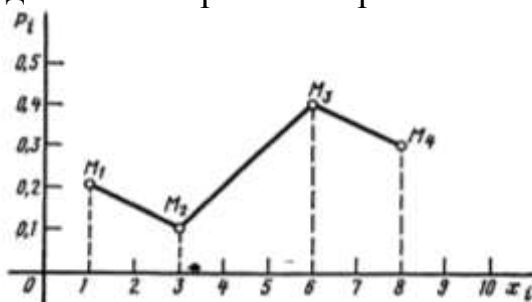
Закон распределения случайной величины  $X$  – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета:

|   |      |     |      |
|---|------|-----|------|
| X | 500  | 10  | 0    |
| p | 0,01 | 0,1 | 0,89 |

*Пример 3.* Дискретная случайная величина  $X$  задана законом распределения. Построить многоугольник распределения.

|   |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|
| X | 1   | 3   | 6   | 8   |
| P | 0,2 | 0,1 | 0,4 | 0,3 |

*Решение.* Для построения многоугольника распределения в прямоугольной системе координат построим точки  $(x_i, p_i)$ , а затем соединим их отрезками прямых.



Функция распределения случайной величины  $X$  – это функция  $F(x)$ , которая при каждом значении своего аргумента  $x$  численно равна вероятности того, что случайная величина  $X$  окажется меньше, чем значение аргумента  $x$ :  $F(x) = P\{X < x\}$

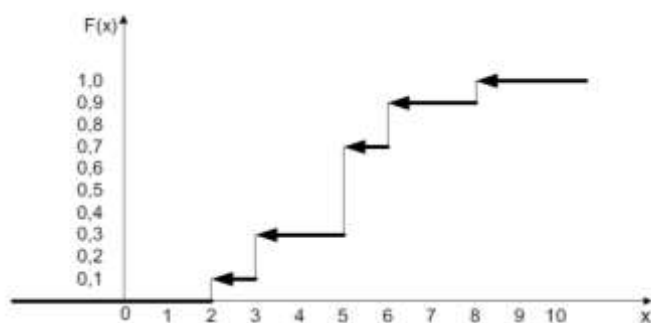
*Пример 4.* Дан ряд распределения дискретной случайной величины:

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 2   | 3   | 5   | 6   | 8   |
| $p$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

Построить функцию распределения этой случайной величины и ее график.

*Решение*

1. Если значение аргумента  $x \leq 2$ , то  $F(x) = P(X < x) = 0$
2. Если значение аргумента  $2 < x \leq 3$ , то  $F(x) = P(X < x) = 0,1$
3. Если значение аргумента  $3 < x \leq 5$ , то  $F(x) = P(X < x) = 0,1 + 0,2 = 0,3$
4. Если значение аргумента  $5 < x \leq 6$ , то  $F(x) = P(X < x) = 0,1 + 0,2 + 0,4 = 0,7$
5. Если значение аргумента  $6 < x \leq 8$ , то  $F(x) = P(X < x) = 0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,2 = 0,9$
6. Если значение аргумента  $x > 8$ , то  $F(x) = P(X < x) = 1$ .



При нахождении закона распределения дискретной случайной величины часто необходимо использовать сложение и умножение вероятностей.

*Пример 5.* Два орудия стреляют по цели; вероятности попадания в цель при одном выстреле для них равны соответственно 0,7 и 0,8. Для случайной величины  $X$  (числа попаданий в мишень при одном залпе) составить ряд распределения.

*Решение.*

1. Возможные значения случайной величины:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ .
2. Вероятности возможных значений:
  - a.  $x_1=0$ , если оба орудия не попали в цель  $\rightarrow P(x_1=0) = (1-0,7)(1-0,8) = 0,06$ .
  - b.  $x_2=1$ , если в цель попало ровно 1 орудие  $\rightarrow P(x_2=1) = 0,7 \cdot (1-0,8) + (1-0,7) \cdot 0,8 = 0,14 + 0,24 = 0,38$
  - c.  $x_2=2$ , если оба орудия попали в цель  $\rightarrow P(X=2) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$ .

Составляем ряд распределения.

|   |      |      |      |
|---|------|------|------|
| X | 0    | 1    | 2    |
| p | 0,06 | 0,38 | 0,56 |

Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (по вариантам)

| I вариант |                                                                                                                                                                                                                                                                                               | II вариант                                                                                                                                                                                                                                        |     |     |     |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|---|---|-----|-----|-----|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|---|----|----|----|----|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1.        | Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 6$ , $x_2 = 7$ , $x_3 = 8$ . Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_2 = 0,6$ ; $p_3 = 0,25$ . Найти вероятность $x_1$ .                                                                                                 | Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 1$ , $x_2 = 2$ , $x_3 = 3$ . Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0,45$ ; $p_3 = 0,3$ . Найти вероятность $x_2$ .                                                     |     |     |     |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 2.        | Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Построить многоугольник распределения. <table><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>P</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,4</td></tr></table>                                            | X                                                                                                                                                                                                                                                 | 2   | 4   | 5   | 6 | P | 0,3 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Построить многоугольник распределения. <table><tr><td>X</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td></tr><tr><td>P</td><td>0,1</td><td>0,5</td><td>0,3</td><td>0,1</td></tr></table> |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  | X | 10 | 15 | 20 | 25 | P | 0,1 | 0,5 | 0,3 | 0,1 |     |     |     |     |
| X         | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 4                                                                                                                                                                                                                                                 | 5   | 6   |     |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| P         | 0,3                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,1                                                                                                                                                                                                                                               | 0,2 | 0,4 |     |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| X         | 10                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 15                                                                                                                                                                                                                                                | 20  | 25  |     |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| P         | 0,1                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,5                                                                                                                                                                                                                                               | 0,3 | 0,1 |     |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 3.        | В лотерее среди 100 билетов 5 с выигрышем 1000 руб., 15 – 100 руб., 25 – 10 руб., остальные по 0. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.                                                                     | В лотерее разыгрывается 1000 билетов. Среди них два выигрыша по 50 руб., пять по 20 руб., десять по 10 руб., 25 по 5 руб. Найти закон распределения случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета. |     |     |     |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 4.        | Два стрелка произвели по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,5; вторым - 0,4. Составить закон распределения числа попаданий в мишень.                                                                                                               | Два стрелка произвели по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком равна 0,7; вторым - 0,6. Составить закон распределения числа попаданий в мишень.                                                                   |     |     |     |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 5.        | Дан ряд распределения дискретной случайной величины: <table><tr><td>X</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr></table> Построить функцию распределения этой случайной величины и ее график. | X                                                                                                                                                                                                                                                 | 1   | 3   | 5   | 7 | 9 | p   | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,2                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,1 | Дан ряд распределения дискретной случайной величины: <table><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td>P</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,4</td><td>0,3</td><td>0,1</td></tr></table> Построить функцию распределения этой случайной величины и ее график. |  |  |   |    | X  | 2  | 4  | 6 | 8   | 10  | P   | 0,1 | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,1 |
| X         | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 3                                                                                                                                                                                                                                                 | 5   | 7   | 9   |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| p         | 0,1                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,3                                                                                                                                                                                                                                               | 0,3 | 0,2 | 0,1 |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| X         | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 4                                                                                                                                                                                                                                                 | 6   | 8   | 10  |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| P         | 0,1                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,1                                                                                                                                                                                                                                               | 0,4 | 0,3 | 0,1 |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |
| 6.        | Телефонистка трижды вызывает абонента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй вызов – 0,3 и третий вызов – 0,4. Составить закон распределения вероятностей числа X вызовов, принятых абонентом.                                                                   | Составить закон распределения вероятностей числа X исправных приборов, если их три, а вероятности того, что исправны, соответственно равны 0,9, 0,8, 0,7.                                                                                         |     |     |     |   |   |     |     |     |     |                                                                                                                                                                                                                                                        |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |  |  |   |    |    |    |    |   |     |     |     |     |     |     |     |     |

Критерии оценки:

- «3» - 3-4 верно выполненных заданий  
«4» - 5 верно выполненных заданий  
«5» - 6 верно выполненных заданий

**Практическое занятие №55 «Непрерывные случайные величины».**

**Цель работы:** закрепить умения и навыки определять вероятности

значений непрерывных случайных величин по функции распределения и плотность распределения непрерывных случайных величин.

### Краткие теоретические сведения

Случайную величину называют *непрерывной*, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

*Плотностью распределения* вероятностей непрерывной случайной величины  $X$  называют функцию  $f(x)$  – первую производную от функции распределения  $F(x)$ .  $f(x) = F'(x)$

*Пример 1.* Дана функция распределения непрерывной случайной величины  $X$ . Найти плотность распределения  $f(x)$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

*Решение.* Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0', & \text{при } x < 0 \\ (\sin x)', & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1', & \text{при } x > \pi/2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \cos x & \text{при } 0 < x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале  $[a, b)$ , можно найти, используя функцию распределения и плотность распределения.

При вычислении такой вероятности по функции распределения, используется формула  $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$ .

*Пример 2.* Случайная величина  $X$  задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1 \\ x/4 + 1/4 & \text{при } -1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания  $X$  примет значение, принадлежащее интервалу  $[0, 2)$ :

*Решение.* Так как по условию (вторая строка) на интервале  $[0, 2)$   $F(x) = x/4 + 1/4$ , то

$$P(0 \leq X < 2) = F(2) - F(0).$$

$$F(2) - F(0) = (2/4 + 1/4) - (0/4 + 1/4) = 1/2.$$

$$\text{Получим } P(0 \leq X < 2) = 1/2.$$

Для нахождения вероятности попадания случайной величины в интервал по плотности распределения, используется формула  $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx$ .

*Пример 3.* Задана плотность вероятности случайной величины  $X$ . Найти

вероятность того, что в результате испытания  $X$  примет значение, принадлежащее интервалу  $[0,5; 1)$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

*Решение.* Искомая вероятность

$$P(0,5 \leq X < 1) = \int_{0,5}^1 2x dx = \frac{2x^2}{2} \Big|_{0,5}^1 = x^2 \Big|_{0,5}^1 = 1 - 0,25 = 0,75$$

Задание:

1. Изучить теоретические положения и примеры.
2. Выполнить задания (по вариантам)

|    | <b>I вариант</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <b>II вариант</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | <p>Случайная величина <math>X</math> задана функцией распределения</p> $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ 0,5x - 1, & \text{при } 2 < x \leq 4 \\ 1, & \text{при } x > 4 \end{cases}$ <p>а) Найти плотность распределения <math>f(x)</math>.<br/> б) Построить график функций <math>F(x)</math> и <math>f(x)</math><br/> в) Найти вероятность того, что в результате испытания <math>X</math> примет значение, заключенное в интервале <math>[3; 5)</math> двумя способами:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– по функции <math>F(x)</math></li> <li>– по функции <math>f(x)</math></li> </ul> | <p>Случайная величина <math>X</math> задана функцией распределения</p> $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2 \\ (x-2)^2, & \text{при } 2 < x \leq 3 \\ 1, & \text{при } x > 3 \end{cases}$ <p>а) Найти плотность распределения <math>f(x)</math>.<br/> б) Построить график функций <math>F(x)</math> и <math>f(x)</math><br/> в) Найти вероятность того, что в результате испытания <math>X</math> примет значение, заключенное в интервале <math>[2, 1; 2, 5)</math> двумя способами:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– по функции <math>F(x)</math></li> <li>– по функции <math>f(x)</math></li> </ul> |
| 2. | <p>Дана функция распределения непрерывной случайной величины <math>X</math></p> $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin 2x & \text{при } 0 < x \leq \pi/4 \\ 1 & \text{при } x > \pi/4 \end{cases}$ <p>Найти плотность распределения <math>f(x)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p>Дана функция распределения непрерывной случайной величины <math>X</math></p> $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin 4x & \text{при } 0 < x \leq \pi/8 \\ 1 & \text{при } x > \pi/8 \end{cases}$ <p>Найти плотность распределения <math>f(x)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 3. | <p>Задана плотность распределения. Найти функцию распределения.</p> $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ (\cos x), & \text{если } 0 < x \leq \pi/2 \\ 0, & \text{если } x > \pi/2 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <p>Задана плотность распределения. Найти функцию распределения.</p> $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \pi/4 \\ 2\sin 2x, & \text{если } \pi/4 < x \leq \pi/2 \\ 0, & \text{если } x > \pi/2 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

Критерии оценки:

- «3» - 1 верно выполненное задание
- «4» - 2 верно выполненных заданий
- «5» - 3 верно выполненных заданий

**Практическое занятие №56 «Составление таблиц и диаграмм в профессиональной деятельности».**

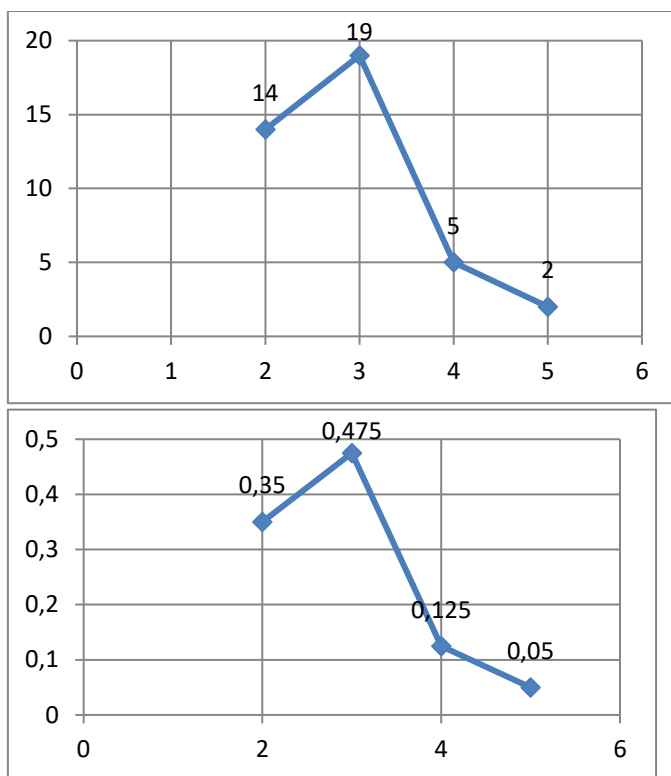
**Цель работы:** закрепить умения и навыки строить статические распределения и графически их изображать

### Краткие теоретические сведения

*Ранжирование* предполагает упорядочение данных выборки. В результате ранжирования по возрастанию получается *вариационный ряд*. Проранжированные данные удобнее записать в виде таблицы, в которой



ординат -  $n_i$ . Аналогично построим полигон относительных частот.



*Пример 2.* На школьниках 1-го «А» класса было проведено исследование для выяснения того, сколько весит портфель первоклассника. В результате взвешиваний был получен следующий статистический ряд (масса каждого портфеля в кг): 2,1; 2,45; 1,9; 2,6; 3,1; 1,95; 3,4; 4,3; 1,15; 2,7; 2,2; 3,2; 2,4; 2,2; 1,8; 1,5; 2,4; 2,25; 2,6; 1,75.

- постройте статистический ряд в виде интервальной таблицы частот, определите относительные частоты на каждом интервале.
- постройте гистограмму частот и относительных частот.

### Решение

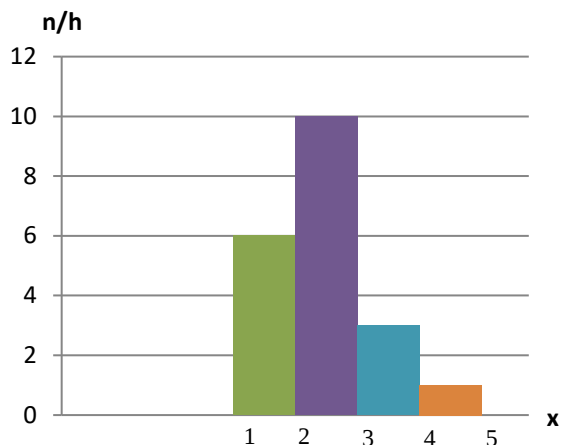
а) Для построения статистического ряда данных в виде интервальной таблицы частот разобьем все значения выборки на равные промежутки по 1 кг и подсчитаем число попаданий в каждый из них. Для нахождения относительных частот используем формулу:  $W_i = n_i/n$ . В нашем примере  $n = 20$ .

|       |     |     |      |      |
|-------|-----|-----|------|------|
| $x_i$ | 1-2 | 2-3 | 3-4  | 4-5  |
| $n_i$ | 6   | 10  | 3    | 1    |
| $W_i$ | 0,3 | 0,5 | 0,15 | 0,05 |

- Для построения гистограммы частот определим для каждого интервала

его длину  $h$  и плотность частоты ( $n_i/h$ ).

$h = 1$  (определяется как разность  $x_i$  интервала);  $n_1/h=6/1=6$ ;  $n_2/h=10/1=10$ ;  $n_3/h=3/1=3$ ;  $n_4/h=1/1=1$ .



Аналогично строится гистограмма относительных частот.

### Задание:

1. Изучить теоретические положения и пример.
2. Выполнить задания (общее задание)

В таблице приведены моменты фактического прибытия поездов на станцию, полученные в результате натурных наблюдений.

### Моменты фактического прибытия поездов на станцию

| №<br>п/п | Время<br>прибытия (ч,<br>мин) | №<br>п/п | Время<br>прибытия (ч,<br>мин) | №<br>п/п | Время<br>прибытия (ч,<br>мин) | №<br>п/п | Время<br>прибытия (ч,<br>мин) | №<br>п/п | Время<br>прибытия (ч,<br>мин) |
|----------|-------------------------------|----------|-------------------------------|----------|-------------------------------|----------|-------------------------------|----------|-------------------------------|
| 1        | 0-04                          | 19       | 6-01                          | 37       | 12-43                         | 55       | 20-45                         | 73       | 4-02                          |
| 2        | 0-10                          | 20       | 6-26                          | 38       | 13-00                         | 56       | 22-45                         | 74       | 4-20                          |
| 3        | 0-25                          | 21       | 7-12                          | 39       | 14-10                         | 57       | 22-49                         | 75       | 4-30                          |
| 4        | 0-45                          | 22       | 7-22                          | 40       | 14-22                         | 58       | 22-54                         | 76       | 4-55                          |
| 5        | 1-15                          | 23       | 7-40                          | 41       | 14-24                         | 59       | 22-59                         | 77       | 5-08                          |
| 6        | 1-30                          | 24       | 8-01                          | 42       | 14-50                         | 60       | 23-15                         | 78       | 5-15                          |
| 7        | 2-01                          | 25       | 8-15                          | 43       | 14-55                         | 61       | 23-25                         | 79       | 5-22                          |
| 8        | 2-26                          | 26       | 9-35                          | 44       | 16-25                         | 62       | 23-47                         | 80       | 6-15                          |
| 9        | 2-40                          | 27       | 9-45                          | 45       | 16-35                         | 63       | 23-51                         | 81       | 7-05                          |
| 10       | 2-45                          | 28       | 9-53                          | 46       | 16-38                         | 64       | 0-04                          | 82       | 7-25                          |
| 11       | 2-50                          | 29       | 10-05                         | 47       | 16-50                         | 65       | 0-35                          | 83       | 7-35                          |
| 12       | 3-48                          | 30       | 10-15                         | 48       | 17-40                         | 66       | 0-48                          | 84       | 7-44                          |
| 13       | 3-52                          | 31       | 10-26                         | 49       | 18-05                         | 67       | 1-01                          | 85       | 8-10                          |
| 14       | 3-58                          | 32       | 10-34                         | 50       | 18-10                         | 68       | 1-48                          | 86       | 8-21                          |
| 15       | 4-15                          | 33       | 11-05                         | 51       | 18-36                         | 69       | 2-38                          | 87       | 8-27                          |
| 16       | 4-40                          | 34       | 11-37                         | 52       | 18-50                         | 70       | 3-01                          | 88       | 8-38                          |
| 17       | 5-09                          | 35       | 12-04                         | 53       | 19-58                         | 71       | 3-12                          | 89       | 10-00                         |
| 18       | 5-43                          | 36       | 12-20                         | 54       | 20-11                         | 72       | 3-50                          |          |                               |

1) Составить статистический ряд интервалов прибытия грузовых поездов на сортировочную станцию.

- 2) построить статистическое распределение для частот и относительных частот;
- 3) построить полигон частот и относительных частот.
- 4) Построить гистограмму распределения вероятностей появления интервалов между поездами.

Критерии оценки:

- «3» - 2 верно выполненных примера
- «4» - 3 верно выполненных примера
- «5» - 4 верно выполненных примера

### **Практическое занятие №57 «Решение уравнений и неравенств».**

**Цель работы:** обобщение и систематизация умений и навыков решать различного типа уравнения и неравенства

#### **Краткие теоретические сведения**

Основные виды уравнений и неравенств:

1. Линейные
2. Квадратные
3. Дробно-рациональные
4. Иррациональные
5. Показательные
6. Логарифмические
7. Тригонометрические

Задание:

1. Повторите теорию: способы решения основных видов уравнений и неравенств.
2. Выполнить задания (по вариантам)

| Вариант 1.                          | Вариант 2.                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Решите уравнения                    |                                     |
| 1) $\sqrt{x+2} = 8 - 3x$            | 1) $\sqrt{1-x} = 3x + 1$            |
| 2) $4^{x+1} + 4^x + 4^{x-1} = 84$   | 2) $5^{x+1} - 5^x + 5^{x-1} = 105$  |
| 3) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$     | 3) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$   |
| 4) $\log_3(3x-5) = 4$               | 4) $\log_5(3x-5) = 3$               |
| 5) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$ | 5) $\log_3^2 x + 2\log_3 x - 8 = 0$ |
| Решите неравенства                  |                                     |

|                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $\sqrt{3x+1} < 5$      | 1) $\sqrt{2x-1} > 3$       |
| 2) $4^x + 2^x - 6 \geq 0$ | 2) $9^x + 3^x - 2 \leq 0$  |
| 3) $\log_5(2x+3) < 3$     | 3) $\log_{0,5}(2x-1) > -3$ |

Критерии оценки:

«3» - 4-5 верно выполненных примера

«4» - 6-7 верно выполненных примера

«5» - 8 верно выполненных примера

### Практическое занятие №58 «Решение заданий экзаменационного типа».

**Цель работы:** обобщение и систематизация умений и навыков решать различного типа экзаменационные задания

Задание:

1. Повторите теорию.
2. Выполнить задания (по вариантам)

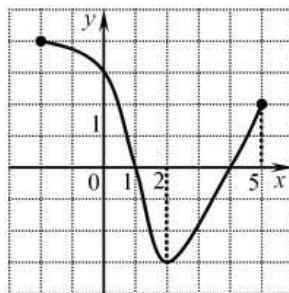
#### Вариант 1.

1. (1 балл) Ананасы стоят 150 руб. за штуку. Какое максимальное число ананасов можно купить на 1000 руб., если их цена снизится на 20%?
2. (1 балл) Вычислить значение выражения:  $(5^{12})^3 : 5^{35} + \sqrt{81}$ .
3. (1 балл) Найти значение  $\cos \alpha$ , если известно, что  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$  и  $\alpha \in III$  четверти.
4. (1 балл) Решить уравнение:  $3^{5x-1} = 81$ .
5. (1 балл) Вычислить значение выражения:  $\log_2 16 \cdot \log_6 36 + \log_6 1$ .
6. (1 балл) Решить уравнение:  $\log_4(x+3) = \log_4(4x-15)$ .
7. (1 балл) Материальная точка движется прямолинейно по закону  $S(t) = 6t^2 - 48t - 1$  (где  $S$  — расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  — время в секундах, измеренное с начала движения). Определить ее скорость (в м/с) в момент времени  $t = 9$  с.
8. (1 балл) Найти область определения функции:  $y = \ln(x^2 - 5x)$ .
9. (1 балл) Решить уравнение:  $\sqrt{x-1} = 7$ .
10. (1 балл) Найти значение выражения:  $4\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$ .

**Используя график функции  $y = f(x)$  (см. рис ниже), определить:**

11. (1 балл) наименьшее и наибольшее значения функции;
12. (1 балл) промежутки убывания функции;

13. (1 балл) точки экстремума.

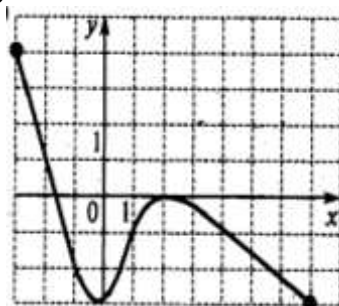


### Вариант 2.

1. (1 балл) Флакон шампуня стоит 200 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?
2. (1 балл) Вычислить значение выражения:  $7^{18} \cdot (7^{-2})^9 - \sqrt{64}$ .
3. (1 балл) Найти значение  $\sin \alpha$ , если известно, что  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$  и  $\alpha \in IV$  четверти.
4. (1 балл) Решить уравнение:  $6^{4x-1} = 216$ .
5. (1 балл) Вычислить значение выражения:  $\log_4 16 \cdot \log_3 27 + \ln 1$ .
6. (1 балл) Решить уравнение:  $\log_6(3x - 9) = \log_6(x + 1)$ .
7. (1 балл) Материальная точка движется прямолинейно по закону  $S(t) = 2t^2 + t - 7$  (где  $S$  — расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  — время в секундах, измеренное с начала движения). Определить ее скорость (в м/с) в момент времени  $t = 10$  с.
8. (1 балл) Найти область определения функции:  $y = \ln(x^2 + x)$ .
9. (1 балл) Решить уравнение:  $\sqrt{2x + 3} = 5$ .
10. (1 балл) Найти значение выражения:  $6 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ .

**Используя график функции  $y = f(x)$  (см. рис ниже), определить:**

11. (1 балл) наименьшее и наибольшее значения функции;
12. (1 балл) промежутки возрастания функции;
13. (1 балл) точки экстремума.



Критерии оценки:

«3» - 6-8 верно выполненных заданий

«4» - 9-11 верно выполненных заданий

«5» - 12-13 верно выполненных заданий

## 4.2. Задания рубежного контроля

### **Контрольная работа №1. Тема: «Числа и вычисления».**

**Цели:** осуществить контроль знаний учащихся по теме «Действительные числа»; формировать навыки оформления контрольных работ; развивать умения самостоятельной работы и самоконтроля знаний

В результате работы студенты должны: знать, что такое рациональное и действительное число, определение арифметического корня натуральной степени и его свойства, определение степени с рациональным и действительным показателем, уметь записывать бесконечную десятичную дробь в виде обыкновенной дроби, применять свойства арифметического корня, выполнять преобразование выражений, используя свойства степени

### **Вариант 1.**

#### **Обязательная часть**

1. Запишите в виде обыкновенной дроби:  $1,2(3)$ ;
2. Вычислите: а)  $\sqrt[3]{50 \cdot \sqrt[3]{20}}$ ; б)  $2 \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$ ;  
в)  $3^4 \cdot 3^{-13} \cdot 3^{-4} \cdot 3^{10}$ ; г)  $(2^{0,5})^{-0,5} \cdot (0,5)^{-1,25}$
3. Упростите выражения: а)  $\sqrt[3]{b \cdot \sqrt[4]{b}}$ ; б)  $(a^{-2} - b^{-2}) \cdot a^2 b^2$ ;  
в)  $\frac{y^{\frac{5}{6}} \cdot y^{\frac{2}{3}}}{y^{-0,5}}$ ;
4. Разложите на множители:  $a^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{4}}$ ;
5. Сократите дробь:  $\frac{\frac{x+y}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}}}{\frac{x+y}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}}}$

#### **Дополнительная часть**

1. Сравните числа:  $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2}$  и  $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2}$
2. Упростите выражение:  $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$

### **Вариант 2.**

#### **Основная часть**

1. Запишите в виде обыкновенной дроби: 4, (73)
2. Вычислите: а)  $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3}$ ; б)  $(\frac{2}{3})^{-2} - 4^{-2}$  ;  
в)  $2^3 \cdot 2^{-9} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{11}$ ; г)  $0,00032^{0,4}$ .
3. Упростите выражения: а)  $\sqrt{a\sqrt{a}}$ ; б)  $a^8 \cdot (a^{-2} - a^{-4})(a^4 + a^5)^{-1}$ ;  
в)  $(y^{\frac{5}{7}})^{1,4} \cdot (y^{\frac{-10}{7}})^{3,5}$
4. Разложите на множители:  $b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{1}{2}}$
5. Сократите дробь:  $\frac{9a-b}{3a-a^{0,5}b^{0,5}}$

### ***Дополнительная часть***

1. Сравните числа:  $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}$  и  $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$
2. Упростите выражение:  $\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}+\sqrt[3]{y}$

### ***Критерий оценки контрольной работы №1:***

#### ***основная часть***

задания №1-№5 –по 1 баллу за каждое задание (максимально 10 баллов),

#### ***дополнительная часть:***

№1-2балла, №2- 3балла.

Оценка «3» - 6 - 8 баллов;

оценка «4» - 9 - 12 баллов;

оценка «5» -13 - 15 баллов.

### ***Контрольная работа №2 Тема «Показательная функция».***

**Цели:** осуществить контроль знаний студентов по теме «Показательная функция»; формировать навыки оформления контрольных работ; развивать умения самостоятельной работы и самоконтроля знаний.

В результате студенты должны: знать определение показательной функции и ее свойства, вид показательных уравнений и неравенств и

алгоритмы их решения; уметь строить график показательной функции, решать показательные уравнения и неравенства.

### **Вариант1**

#### **Основная часть.**

1. Постройте график функции:  $y=2^x + 1$  и перечислите основные свойства.
2. Сравнить: а)  $(\frac{1}{7})^3$  и  $(\frac{1}{7})^5$ ; б)  $4^{-3}$  и  $4^{-2}$ ;
3. Решите уравнение: а)  $(0,1)^{2x-3}=1$ ; б)  $2^{7-3x} = (\frac{1}{2})^{x-4}$ ;  
в)  $2^{x+2} + 2^x = 5$ ; г)  $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$
4. Решите неравенство: а)  $5^{4x-7} > 1$ ; б)  $0,5^x < 0,125$ , в)  $(\sqrt{5})^{x-4} \geq \frac{1}{5}$

#### **Дополнительная часть**

1. Решите уравнение:  $7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 2^{x+5} + 3 \cdot 2^x$ .
2. Решите графически уравнение:  $5^x = x + 4$ .

### **Вариант2**

#### **Основная часть.**

1. Постройте график функции:  $y=3^x - 1$  и перечислите основные свойства.
2. Сравнить: а)  $(\frac{1}{2})^4$  и  $(\frac{1}{2})^5$ ; б)  $3^{-3}$  и  $3^{-2}$ ;
3. Решите уравнение: б)  $0,8^{2x-3}=1$ . а)  $3^{2-x} = (\frac{1}{3})^{3x-4}$ ;  
в)  $3^{x+2} + 3^x = 30$ ; г)  $4^x - 2^x - 20 = 0$
4. Решите неравенство: а)  $2^{2x-9} \geq 1$ ; б)  $0,8^x < 0,64$ , в)  $(\sqrt{3})^{x-2} \leq \frac{1}{9}$

#### **Дополнительная часть**

1. Решите уравнение:  $3^{x+3} + 3^x = 5 \cdot 2^{x+4} - 17 \cdot 2^x$ .
2. Решите графически уравнение:  $3^x = -x + 4$ .

### **Критерий оценки контрольной работы №2:**

#### **основная часть**

задания №1-№4 – по 1 баллу за каждое задание (максимально 10 баллов),

#### **дополнительная часть:**

№1-2 балла, №2- 2 балла.

Оценка «3» - 7 - 8 баллов;

оценка «4» - 9- 11 баллов;

оценка «5» -12 - 14 баллов.

### **Контрольная работа №3 Тема «Логарифмическая функция».**

**Цели:** осуществить контроль знаний студентов по теме «Логарифмическая функция»; формировать навыки оформления контрольных работ; развивать умения самостоятельной работы и самоконтроля знаний.

В результате студенты должны: знать определение логарифмической функции и ее свойства, вид логарифмических уравнений и неравенств и алгоритмы их решения; уметь строить график логарифмической функции, решать логарифмические уравнения и неравенства.

#### **Вариант1**

##### **Основная часть.**

1. Постройте график функции  $y = \log_3 x$  и опишите ее свойства.
2. Сравните числа  $\log_3 \frac{2}{9}$  и  $\log_3 \frac{3}{5}$
3. Найти область определения функции  $y = \log_3 (x^2 - 13x + 12)$
4. Вычислите: а)  $\log_3 21 - \log_3 7$ ; б)  $6^{\log_6 10}$ ; в)  $\log_3 36 - \log_3 \frac{8}{9} + \log_3 18$ ;
5. Решите уравнение: а)  $\log_5 (2x - 1) = 2$  б)  $\log_2 (x - 2) + \log_2 x = 3$
6. Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} x - y = 7 \\ \log_3 \frac{x+1}{y} = 2 \end{cases}$$
7. Решите неравенство:  $\log_3 (1-x) > \log_3 (3-2x)$

##### **Дополнительная часть**

1. Решите неравенство и укажите все его целые решения  $\log_3 x > \log_3 (5 - x)$
2. Решите неравенство:  $4\log_4 x - 3\log_x 4 \leq 1$ .

#### **Вариант2**

##### **Основная часть**

1. Постройте график функции  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  и опишите ее свойства.
2. Сравните числа  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{9}$  и  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5}$
3. Найти область определения функции  $y = \lg (-x^2 - 5x + 14)$
4. Вычислите: а)  $\log_2 38 - \log_2 19$ ; б)  $64^{\log_6 1}$ ; в)  $\log_3 135 - \log_3 20 + 2\log_3 6$ ;
5. Решите уравнение: а)  $\log_7 (4x-6) = \log_7 (2x-4)$ , б)  $\log_3 (x - 8) + \log_3 x = 2$

6. Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \log_2 \frac{y-1}{x} = 3 \end{cases}$$

7. Решите неравенство:  $\log_5 (2x+3) > \log_5 (x-1)$

***Дополнительная часть***

1. Решите неравенство и укажите все его целые решения

$$\log_2 (6 - x) \leq \log_2 x$$

2. Решите неравенство:  $\log_x 3 \leq 4(1 + \log_{\frac{1}{3}} x)$ .

***Критерий оценки контрольной работы №3:***

***основная часть***

задания №1-№4 – по 1 баллу за каждое задание (максимально 10 баллов),

***дополнительная часть:***

№1-2 балла

№2- 3 балла.

Оценка «3» - 7 - 9 баллов;

оценка «4» - 10- 12 баллов;

оценка «5» -13 - 15 баллов.

***Контрольная работа №4 Тема «Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей».***

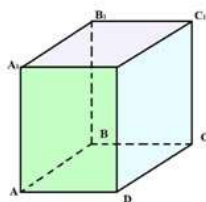
***Цели:*** осуществить контроль знаний студентов по темам «Параллельность прямых и плоскостей. Перпендикулярность прямых и плоскостей»; формировать навыки оформления контрольных работ; развивать умения самостоятельной работы и самоконтроля знаний.

В результате студенты должны: знать аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей, и их следствия, определение параллельности прямых, прямой и плоскости, плоскостей в пространстве и соответствующие теоремы, определение тетраэдра и параллелепипеда, определение перпендикулярности прямых, прямой и плоскости, плоскостей в пространстве и соответствующие теоремы, теорему о трех перпендикулярах, уметь решать задачи на применение аксиом и теорем курса, решать задачи на построение сечений

***Вариант1***

***Основная часть.***

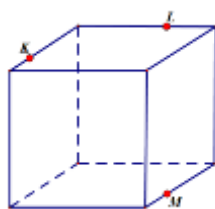
1. Определите взаимное расположение прямых: а)  $A_1B_1$  и  $DC$ ; б)  $A_1B_1$  и  $BC$ .



2. Две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны между собой. Из точки  $M$ , не лежащей ни в одной из этих плоскостей, ни между плоскостями, проведены две прямые, пересекающие эти плоскости соответственно в точках  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ . Известно, что  $MA_1 = 4$  см,  $B_1B_2 = 9$  см,  $A_1A_2 = 2MA_1$ . Найдите  $MA_2$  и  $MB_2$ .
3. Постройте сечение тетраэдра  $DABC$  плоскостью, проходящей через т.  $M$  параллельно плоскости грани  $CDB$ , если т.  $M$  лежит внутри грани  $ADB$ .
4. Двугранный угол равен  $90^\circ$ . Точка удалена от каждой грани на расстояниях 12 и 9 см соответственно. Найдите расстояние от данной точки до ребра двугранного угла.
5. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 см, угол между диагональю и высотой  $45^\circ$ . Найдите высоту прямоугольного параллелепипеда.

### *Дополнительная часть*

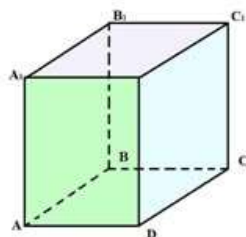
1. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки:  $K$ ,  $L$ ,  $M$



### *Вариант 2*

#### *Основная часть.*

1. Определите взаимное расположение прямых: а)  $A_1C_1$  и  $AC$ ; б)  $A_1C_1$  и  $BD$ .



2. Две плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны между собой. Из точки  $K$ , не лежащей ни в одной из этих плоскостей, ни между плоскостями, проведены две прямые, пересекающие эти плоскости соответственно в точках  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ . Известно, что  $KA_1 = 3$  см,  $B_1B_2 = 15$  см,  $A_1A_2 = 3KA_1$ . Найдите  $KA_2$  и

KB<sub>2</sub>.

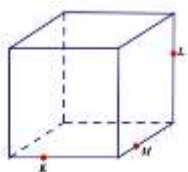
3. Постройте сечение тетраэдра DABC плоскостью, проходящей через т. М параллельно плоскости грани ABC, если т. М лежит внутри грани ADC.

4. Двугранный угол равен  $90^\circ$ . Точка удалена от каждой грани на расстоянии 8 и 6 см соответственно. Найдите расстояние от данной точки до ребра двугранного угла.

5. Из точки к плоскости равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковыми сторонами 13 см через вершину треугольника проведен перпендикуляр длиной 2 см. Найдите расстояние от точки до основания треугольника.

### ***Дополнительная часть***

1. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: К, L, М



### ***Критерий оценки контрольной работы №4:***

#### ***основная часть***

задания №1-№5 –по 1 баллу за каждое задание (максимально 5 баллов),

#### ***дополнительная часть:***

№1- 2 балла

Оценка «3» - 3 балла;

оценка «4» - 4-5 балла;

оценка «5» -6-7 баллов.

### ***Контрольная работа №5 Тема «Тригонометрические формулы»***

**Цели:** осуществить контроль знаний студентов по теме «Тригонометрические формулы»; укреплять навыки оформления контрольных работ; развивать умения самостоятельной работы и самоконтроля знаний.

В результате студенты должны: знать определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса, формулы тригонометрии, уметь применять тригонометрические формулы.

### ***Вариант 1***

#### ***Основная часть.***

1. Выразите величины углов: а)  $\frac{5\pi}{6}$  в градусах; б)  $160^\circ$  в радианах

2. Вычислите значение выражения:

а)  $\cos 45^\circ \cdot \sin 60^\circ - \frac{1}{2}(\operatorname{tg} 45^\circ - \sin 90^\circ)$ ,

б)  $\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} + \cos \pi + \operatorname{tg} 0 + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$ ;

3. Выполните задание:

Дано:  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Найти  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ .

4. Доказать тождество:  $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$

5. Вычислите:

а)  $\sin 120^\circ$ ; б)  $\cos 79^\circ \cdot \cos 34^\circ + \sin 79^\circ \cdot \sin 34^\circ$

6. Упростите выражение:  $\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$

7. Вычислите:  $\cos 165^\circ + \cos 75^\circ$

### ***Дополнительная часть***

1. Упростите выражение:  $(\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} - \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$ .

### ***Вариант 2***

#### ***Основная часть.***

1. Выразите величины углов: а)  $\frac{3\pi}{4}$  в градусах; б)  $225^\circ$  в радианах;

2. Вычислите значение выражения:

а)  $2 \cos 60^\circ + 3 \sin 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$ ;

б)  $\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{3\pi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ .

3. Выполните задание:

Дано:  $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Найти  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ .

4. Доказать тождество:  $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

5. Вычислите: а)  $\cos 150^\circ$ ; б)  $\cos 35^\circ \cdot \sin 65^\circ - \sin 35^\circ \cdot \cos 65^\circ$

6. Упростите выражение:  $\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)}$
7. Вычислите:  $\cos \frac{13\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}$ ;

### ***Дополнительная часть***

1. Упростите выражение:  $(\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} - \cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$ .

### ***Критерий оценки контрольной работы №5:***

#### ***основная часть***

задания №1-№7 –по 1 баллу за каждое задание (максимально 7 баллов),

#### ***дополнительная часть:***

№1- 2 балла

оценка «3» - 4-5 балла;

оценка «4» - 6-7 балла;

оценка «5» -8-9 баллов.

### ***Контрольная работа №6 Тема «Тригонометрические уравнения».***

***Цели:*** осуществить контроль знаний студентов по теме «Тригонометрические уравнения»; укреплять навыки оформления контрольных работ; развивать умения самостоятельной работы и самоконтроля знаний.

В результате студенты должны: знать определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса, алгоритм решения тригонометрических уравнений, уметь применять формулы при решении тригонометрических уравнений.

### ***Вариант1***

#### ***Основная часть.***

1. Решите уравнение:
- а)  $\sin x = \frac{1}{2}$ ;
- б)  $\cos \frac{x}{2} = -1$ ;
- в)  $\operatorname{ctg} \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1$ ;
- г)  $2\cos^2 x = 1 + \sin x$ ;

е)  $\cos 2x - \cos x = 0$

***Дополнительная часть***

1. Решите уравнение  $2\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$ ;

***Вариант 2***

***Основная часть.***

1. Решите уравнение:

а)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

б)  $\sin \frac{x}{2} = 1$ ;

в)  $\operatorname{tg} \left( 3x + \frac{\pi}{2} \right) = 1$ ;

г)  $2\sin^2 x = 1 - \cos x$ ;

д)  $\cos 2x - \cos x = 0$

***Дополнительная часть***

1. Решите уравнение  $4\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$ ;

***Критерий оценки контрольной работы №6:***

***основная часть***

задания №1-№3 –по 1 баллу за каждое задание (максимально 5 баллов),

***дополнительная часть:***

№1- 2 балла

оценка «3» - 3-4 баллов;

оценка «4» - 5-6 баллов;

оценка «5» -7 баллов.

***Контрольная работа №7 Тема «Производная функции и ее применение».***

***Цели:*** осуществить контроль знаний студентов по теме «Применение производной к исследованию функций»; укреплять навыки оформления контрольных работ; развивать умения самостоятельной работы и самоконтроля знаний.

В результате студенты должны: знать достаточный признак возрастания (убывания) функции, определение стационарных и критических точек, точек максимума и минимума, общую схему исследования графика, алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке, уметь использовать производную для

изучения свойств и построения графиков, решать задачи прикладного характера на нахождения наибольшего и наименьшего значений.

### ***Вариант 1***

#### ***Основная часть.***

- 1) Найти интервалы возрастания и убывания функции:  
а)  $y = 5 - 8x - x^2$ ; б)  $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ ;
- 2) Найти точки экстремума функции: а)  $y = -x^3 + x^2 + 8x$ ; б)  $y = x^5 - 5x^4 + 3$ .
- 3) Построить график функции:  $y = x^4 - 8x^2 + 5$
- 4) Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанном отрезке:  
 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$ ,  $[-2; 2]$

#### ***Дополнительная часть***

1. Среди прямоугольников, сумма длин трёх сторон у которых равна 20, найти прямоугольник наибольшей площади.

### ***Вариант 2***

#### ***Основная часть.***

- 1) Найти интервалы возрастания и убывания функции:  
а)  $y = 3x^2 - 12x + 1$ ; б)  $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x$ ;
- 2) Найти точки экстремума функции:  
а)  $y = -x^3 - 3x^2 + 9x$ ; б)  $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$
- 3) Построить график функции:  $y = 2x^5 - 5x^4 + 4$
- 4) Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанном отрезке:  
 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$ ,  $[-1; 3]$

#### ***Дополнительная часть***

1. Найти ромб с наибольшей площадью, если известно, что сумма длин его диагоналей равна 10.

### ***Критерий оценки контрольной работы №7:***

#### ***основная часть***

задания №1-№4 —по 1 баллу за каждое задание (максимально 4 балла),

***дополнительная часть:*** №1 - 2 балла,

оценка «3» - 3 балла;

оценка «4» - 4 баллов;

оценка «5» -5-6 баллов.

**Контрольная работа №8 Тема «Векторы и координаты в пространстве».**

**Цели:** осуществить контроль знаний студентов по теме «Метод координат в пространстве»; укреплять навыки оформления контрольных работ; развивать умения самостоятельной работы и самоконтроля знаний.

В результате студенты должны: знать понятие прямоугольной системы координат в пространстве, понятие координат вектора в данной системе координат, действия над векторами, формулы координат середины отрезка, длины вектора, расстояния между двумя точками, скалярного произведения векторов, угла между векторами, уметь решать простейшие задачи в координатах, находить скалярное произведение векторов и угол между векторами.

**Вариант 1**

**Основная часть.**

1. Дано: A (-3; 1; 2), B (1; -1; 2). Найти координаты середины отрезка AB.
2. Найти длину вектора  $\vec{AB}$ , если A (4; 0; 5), B (3; 2; -1).
3. При каком значении  $m$  векторы  $\vec{a} \{3; m+1; 1\}$  и  $\vec{b} \{-4; 2; 3m\}$  будут перпендикулярны?
4. Дано: A (1; 1; 2), B(0; 1; 1), C(2; -2; 2), D(2; -3; 3). Найдите угол между прямыми AB и CD.
5. Вычислить скалярное произведение  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ , если  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .

**Дополнительная часть**

1. Даны точки A (1; 3; 3), B(1;0;2), C(-1;-1;3) и D(-1;0;3). Найти угол между векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$ .
2. Даны три вершины A(2;-8;9), B(-1;3;4), C(-4;6;3) параллелограмма ABCD. Найти координаты его четвертой вершины D.

**Вариант 2**

**Основная часть.**

1. Дано: A (-1; 2; 2), C (3; -2; 2). Найти координаты середины отрезка AC.
2. Найти длину вектора  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$
3. При каком значении  $m$  векторы  $\vec{a} \{4; m-1; m\}$  и  $\vec{b} \{-2; 4; 3-m\}$  будут перпендикулярны?
4. Дано: A (1; 1; 0), B (3; -1; 0), C (4; -1; 2), D (0; 1; 0). Найдите угол между прямыми AB и CD.
5. Вычислить скалярное произведение  $(5\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{b} - \vec{a})$ , если  $\vec{a} \{1; 0; 4\}$ ,  $\vec{b} \{2; 2; 1\}$

### Дополнительная часть

1. Даны точки  $M(3;-2; 2)$ ,  $N(2;-1;0)$ ,  $K(-1;-5;4)$  и  $P(0;-4;4)$ . Найти угол между векторами  $\overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{KP}$ .

2. Даны три вершины  $A(1;-2;3)$ ,  $B(2;3;-5)$ ,  $D(-4;5;1)$  параллелограмма ABCD. Найти координаты его четвертой вершины C.

**Критерий оценки контрольной работы №8:**

**основная часть**

задания №1-№5 –по 1 баллу за каждое задание (максимально 5 баллов),

**дополнительная часть:**

№1- 2 балла, №2- 2 балла,

оценка «3» - 4-5 баллов;

оценка «4» - 6-7 баллов;

оценка «5» -8-9 баллов.

### Контрольная работа №9 Тема «Интеграл».

**Цели:** осуществить контроль знаний студентов по теме «Интеграл»; укреплять навыки оформления контрольных работ; развивать умения самостоятельной работы и самоконтроля знаний.

В результате студенты должны: знать определение первообразной, формулы первообразных элементарных функций, формулу Ньютона-Лейбница, уметь находить первообразные функций, вычислять площади различных фигур.

### Вариант 1

#### Основная часть.

1. Найдите все первообразные функции:

а)  $f(x)=2\sin x + e^x$ ; б)  $f(x)=5x^4 + 2^x$ ;

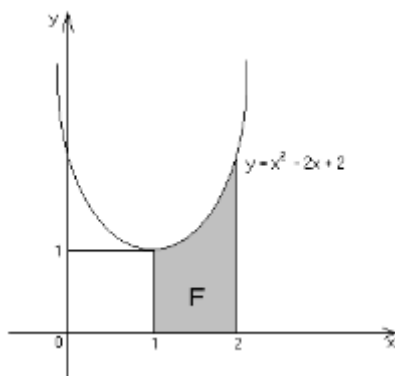
2. Для функции  $f(x)$  найдите первообразную, график которой проходит через точку A:

$f(x) = 2x^2 + x$ , A(1; 1).

3. Вычислите интеграл:

а)  $\int_0^1 (2x^2 + 3)dx$ ; б)  $\int_{-5}^1 (x^2 + 8x + 16)dx$ ;

4. Вычислить площадь фигуры F, изображенной на рисунке.



5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = -x^2 - 4x$  и  $y = 4 + x$ .

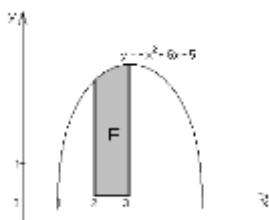
### Дополнительная часть

1. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой  $v(t) = t^2 - 3t + 2$ . Напишите формулы зависимости ее ускорения  $a$  и координаты  $x$  от времени  $t$ , если в начальный момент времени ( $t = 0$ ) координата  $x = -5$ .

### Вариант 2

#### Основная часть.

- Найдите все первообразные функции:  
 а)  $f(x) = 3\cos x + 4x^3$ ; б)  $f(x) = \sin x - 5^x$ ;
- Для функции  $f(x)$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $A$ :  
 $f(x) = 2x + 4x^3$ ,  $A(1; 5)$ .
- Вычислите интеграл:  
 а)  $\int_0^1 (3x^2 - x) dx$ ; б)  $\int_1^4 (x^2 - 6x + 9) dx$ ;
- Вычислить площадь фигуры  $F$ , изображенной на рисунке.



5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:  
 $y = -x^2 + 4x$  и  $y = 4 - x$ .

### Дополнительная часть

1. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой  $v(t) = -t^2 + 4t + 3$ . Напишите формулы зависимости ее ускорения  $a$  и координаты  $x$  от времени  $t$ , если в начальный момент времени ( $t = 0$ ) координата  $x = -2$ .

### Критерий оценки контрольной работы №9:

#### основная часть

задания №1-№5 –по 1 баллу за каждое задание (максимально 7 баллов),

**дополнительная часть:**

№1- 2 балла,

оценка «3» - 4-5 баллов;

оценка «4» - 6-7 баллов;

оценка «5» -8-9 баллов.

**Контрольная работа №10 Тема «Объемы тел».**

**Цели:** осуществить контроль знаний студентов по теме «Объемы тел»; укреплять навыки оформления контрольных работ; развивать умения самостоятельной работы и самоконтроля знаний.

В результате студенты должны: знать формулы для вычисления объема призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара и его частей, уметь вычислять объемы различных тел.

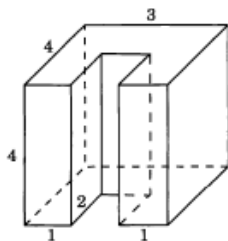
**Вариант 1**

**Основная часть.**

1. Объем куба равен  $64 \text{ см}^3$ . Найдите его диагональ.
2. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник, катет которого равен 40 м, а гипотенуза равна 41 м. Высота пирамиды равна 20м. Найдите объем пирамиды.
3. Прямоугольник, стороны которого равны 2 см и 5 см, вращается вокруг меньшей стороны. Найдите объем тела вращения.
4. Секущая плоскость проведена на расстоянии 6 см от центра шара. Радиус сечения равен 8 см. Найдите объем шара.
5. Свинцовый шар, диаметр которого 20 см, переплавлен в шарики с диаметром в 10 раз меньше. Сколько таких шариков получилось.

**Дополнительная часть**

1. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые. Размеры на рис. даны в см.



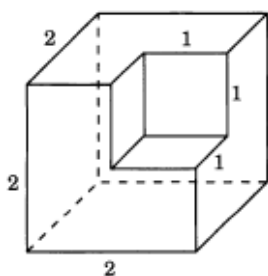
## **Вариант 2**

### **Основная часть.**

1. Диагональ куба равна  $\sqrt{12}$  см. Найдите его объем.
2. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна 4 см, а диагональ основания равна  $6\sqrt{2}$  см.
3. Прямоугольный треугольник, катет которого равен 4 м, а гипотенуза равна 5 м, вращается вокруг большего катета. Найдите объем тела вращения.
4. Площадь сферы равна  $100\pi$  м<sup>2</sup>. Расстояние от центра сферы до секущей плоскости равно 4 м. Найдите радиус сечения.
5. Поверхность шара равна  $225\pi$  м<sup>2</sup>. Определите его объем.

### **Дополнительная часть**

1. Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые. Размеры на рис. даны в см.



### **Критерий оценки контрольной работы №10:**

#### **основная часть**

задания №1-№5 –по 1 баллу за каждое задание (максимально 5 баллов),

#### **дополнительная часть:**

№1 - 2 балла,

оценка «3» - 3 балла;

оценка «4» - 4-5 баллов;

оценка «5» -6-7 баллов.

### **Контрольная работа №11 Тема «Комбинаторика, статистика и теория вероятности».**

**Цели:** осуществить контроль знаний студентов по теме «Комбинаторика, статистика и теория вероятности»; укреплять навыки

оформления контрольных работ; развивать умения самостоятельной работы и самоконтроля знаний.

В результате студенты должны: знать основные определения, уметь: решать простейшие комбинаторные и вероятностные задачи.

### ***Вариант 1***

#### ***Основная часть.***

1. В одном классе 20 учеников, в другом- 25. Каким числом способов можно выбрать по одному представителю от каждого класса?
2. Каким числом способов можно рассадить 8 человек в ряд на 8 стульях?
3. Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 50 выступлений - по одному от каждой страны. В первый день 26 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жребием. Какова вероятность того, выступление представителя России состоится в третий день конкурса?
4. Сколькими способами можно организовать дозор из трех солдат и одного офицера, если всего есть 25 солдат и 4 офицера.
5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что оба раза выпадет решка.
6. В среднем из 100 арбузов, поступивших в продажу 35 неспелых. Найдите вероятность того, что один купленный арбуз окажется спелым.
7. Дан набор равновероятных чисел 3; 6; 4; -2; 5; 8. Найдите математическое ожидание и медиану этого набора.

#### ***Дополнительная часть***

1. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

### ***Вариант 2***

#### ***Основная часть.***

1. В ящике лежат 6 ножей, 6 вилок и 10 ложек. Все предметы различны. Каким числом способов можно выбрать набор из ножа, вилки и ложки?
2. Каким числом способов можно расставить на полке 9 разных книг?
3. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 60 выступлений - по одному от каждой страны. В первый день 30 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жребием. Какова вероятность того, выступление представителя России состоится в третий день конкурса?
4. Из группы в 20 человек надо выбрать две команды по 4 человека. Каким числом способов это можно сделать?

5. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что один раз выпадет орел, а другой раз – решка.
6. В среднем из 500 фонариков, поступивших в продажу 5 неисправных. Найдите вероятность того, что один купленный фонарик окажется исправным
7. Дан ряд распределения дискретной случайной величины
- |     |      |      |      |      |      |       |
|-----|------|------|------|------|------|-------|
| $X$ | 10   | 20   | 30   | 40   | 50   | 60    |
| $P$ | 0,24 | 0,36 | 0,20 | 0,15 | 0,03 | 0,02. |
- Найти моду.

### ***Дополнительная часть***

1. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 55% этих стекол, вторая — 45%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

### ***Критерий оценки контрольной работы №11:***

#### ***основная часть***

задания №1-№7 —по 1 баллу за каждое задание (максимально 7 баллов),

#### ***дополнительная часть:***

№1- 2 балла,

оценка «3» - 4-5 баллов;

оценка «4» - 6-7 баллов;

оценка «5» -8-9 баллов.

### ***Контрольная работа №612 «Итоговая контрольная работа».***

**Цели:** систематизация знаний по изученному материалу, подготовка к экзамену.

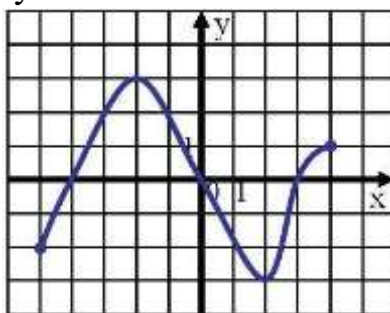
### **Вариант 1.**

- (1 балл) Стоимость проезда в маршрутном такси составляет 40 руб. Какое наибольшее число поездок можно будет совершить в этом маршрутном такси на 500 руб., если цена проезда снизится на 10%?
- (1 балл) Вычислить значение выражения:  $25^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} + 17^0$ .
- (1 балл) Найти значение  $\cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$  и  $\alpha \in \text{II}$  четверти.
- (1 балл) Решить уравнение:  $3^{x-6} = 9^x$ .
- (1 балл) Вычислить значение выражения:  $\lg 1 + \lg 100 \cdot \log_5 25$ .

6. (1 балл) Решить уравнение:  $\log_3(5 - 2x) = 3$ .
7. (1 балл) Тело движется по закону  $S(t) = 3t^2 - 12t$  (м). Определить, в какой момент времени скорость будет равна 6 м/с.
8. (1 балл) Найти область определения функции:  $y = \log_4(-x^2 + x)$ .
9. (1 балл) Решить уравнение:  $\sqrt{11 + x} = 5$ .
10. (1 балл) Найти значение выражения:  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{2}$ .

**Используя график функции  $y = f(x)$  (см. рис ниже), определить:**

11. (1 балл) наименьшее и наибольшее значения функции;
12. (1 балл) промежутки убывания функции;
13. (1 балл) точки экстремума.



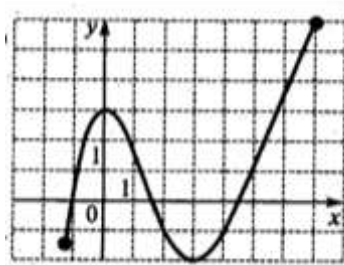
14. (2 балла) Найти интервалы убывания функции:  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ .
15. (2 балла) Сколько может быть вариантов выбора 2 карандашей и 3 ручек из пяти различных карандашей и шести различных ручек?
16. (2 балла) Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетом 5 см и гипотенузой 13 см, боковое ребро равно 8 см. Найти объем призмы.

### Вариант 2.

1. (1 балл) Оптовая цена учебника 250 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 7000 рублей?
2. (1 балл) Вычислить значение выражения:  $16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{1}{3}} \cdot 12^0$ .
3. (1 балл) Найти значение  $\sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  и  $\alpha \in I$  четверти.
4. (1 балл) Решить уравнение:  $2^{5-x} = 4^{2x}$ .
5. (1 балл) Вычислить значение выражения:  $\log_9 1 - \log_4 4 + \lg 1000$ .
6. (1 балл) Решить уравнение:  $\log_2(x - 8) = 3$ .
7. (1 балл) Тело движется по закону  $S(t) = t^2 - 10t + 6$  (м), где  $t$  – время движения в секундах. Определить, в какой момент времени скорость будет равна 8 м/с.
8. (1 балл) Найти область определения функции:  $y = \ln(x^2 - 4)$ .
9. (1 балл) Решить уравнение:  $\sqrt{2x - 3} = 7$ .
10. (1 балл) Найти значение выражения:  $\sin \pi - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$ .

**Используя график функции  $y = f(x)$  (см. рис ниже), определить:**

11. (1 балл) наименьшее и наибольшее значения функции;
12. (1 балл) промежутки убывания функции;
13. (1 балл) точки экстремума.



14. (2 балла) Найти интервалы возрастания функции:  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ .
15. (2 балла) В чемпионате участвует 12 команд. Сколькими различными способами могут быть распределены три различные медали?
16. (2 балла) В цилиндре радиуса 5 см проведено параллельное оси сечение, отстоящее от нее на расстоянии 3 см. Найти объем цилиндра, если площадь указанного сечения равна  $64 \text{ см}^2$ .

Критерии оценки:

- «3» - 10-14 баллов
- «4» - 15-17 баллов
- «5» - 18-19 баллов

#### 4.3. Промежуточная аттестация (экзамен)

Промежуточная аттестация проводится в форме контрольной работы

## 5. Условия проведения промежуточной аттестации

Экзамен проводится в письменной форме.

Аттестационная работа имеет 4 равнозначных варианта, каждый из которых включает 22 задания. Заданиям присвоен уровень сложности, в соответствии с которым проводится оценка результативности выполнения работы. Все задания распределены на 2 части.

Часть 1 содержит 18 заданий (A1-A18) обязательного уровня по математическому курсу "Алгебра и начала анализа" 10-11 классов. Уровень сложности этих заданий определяется "Требованиями к математической подготовке студентов", предусмотренными программой.

Задания первой части не требуют громоздких вычислений, сложных преобразований и нестандартных умозаключений. Для их решения достаточно уметь использовать основные определения, владеть минимальным набором формул и алгоритмов. Выполнение каждого задания оценивается по 1 баллу, всего 18 баллов.

Часть 2 содержит четыре более сложных задания (B1-B4), три — алгебраических (B1, B3, B4) и одно геометрическое (B2), при их выполнении требуется записать полное решение и ответ. Эта часть составлена из стандартных для курса математических заданий, уровень сложности которых несколько выше, чем в первой части. Задание по геометрии требует знания теории, умения ими пользоваться, определенного уровня стереометрических представлений, умения работать с изображениями пространственных конфигураций. В то же время уровень доказательности при выполнении заданий предполагается минимальный. Успешное выполнение заданий части B оценивается по 3 балла.

Результат аттестационной работы оценивается двумя количественными показателями, а именно оценкой по пятибалльной шкале и рейтингом от 0 до 30 баллов.

Соответствие традиционной оценки и рейтинга:

"5" – 21-30 баллов

"4" – 15-20 баллов

"3" – 9-18 баллов

"2" – 0-8 баллов